Известия Института математики и информатики. Ижевск. 1998. №2(13)

УДК 517.934

С.Ф. Николаев, Е.Л. Тонков

ПОЗИЦИОННОЕ УПРАВЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМОЙ БЛИЗКОЙ К ДОКРИТИЧЕСКОЙ[1]

Ключевые слова: позиционное управление, задача быстродействия, линейные управляемые системы, чебышевские системы

Введение

Проблема построения позиционного управления $u(t,x)$ (управления по принципу обратной связи) в задаче быстродействия для динамической системы, поведение которой описывается уравнением

$$\dot{x} = v(t,x,u), \quad (t,x) \in \mathbb{R}^{1+n}, \quad u \in U\,, \tag{1}$$

(U — выпуклый компакт в $\mathbb{R}^m$, $0 \in \operatorname{int} U$) остается одной из наиболее трудных и мало изученных задач математической теории оптимального управления. Важной причиной, препятствующей существованию позиционного управления, служит отсутствие внутренней устойчивости уравнения

$$\dot{x} = v(t,x,u(t,x)), \quad (t,x) \in \mathbb{R}^{1+n}, \tag{2}$$

по отношению к изменениям $u(t,x)$ на множествах в $\mathbb{R}^{1+n}$ с нулевой мерой Лебега.

В.Г. Болтянский по-видимому первым, обратил внимание на такое аномальное поведение уравнения (2), но достаточно простой пример (линейной по фазовым координатам и управлению стационарной системы на плоскости) построен П. Бруновским в [1]. Приведем здесь несколько модифицированный пример П. Бруновского.

[1]Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 97–01–00413) и конкурсным центром фундаментального естествознания (грант 97–0–1.9)

1. Пример Бруновского

Рассмотрим задачу быстродействия в начало координат для системы уравнений

$$\dot{x}_1 = -x_1 + u_1, \quad \dot{x}_2 = x_2 + u_2, \tag{3}$$

где $u \in U \doteq \{u = (u_1, u_2) : \ |u_1 + u_2| \leqslant 1\}$. Легко убедиться, что множество управляемости системы (3) представляет из себя полосу

$$D = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon \ x_1 \in \mathbb{R}, \ |x_2| < 1\},$$

а оптимальное в смысле быстродействия управление определено равенством

$$\widehat{u}(x) = \widehat{u}(x_1, x_2) = \begin{cases} (0,0), \text{ если} & x_1 = x_2 = 0, \\ (+1,0), \text{ если} & x_1 < 0, x_2 = 0, \\ (-1,0), \text{ если} & 0 < x_1, x_2 = 0, \\ (0,-1), \text{ если} & 0 < x_2 < 1, \\ (0,+1), \text{ если} & -1 < x_2 < 0, \end{cases} \tag{4}$$

Система (3), замкнутая управлением (4),

$$\dot{x}_1 = -x_1 + \widehat{u}_1(x_1, x_2)\,, \quad \dot{x}_2 = x_2 + \widehat{u}_1(x_1, x_2)\,, \tag{5}$$

обладает следующими свойствами:

1) пусть $x(t, t_0, x^0)$ — решение (в смысле Каратеодори) системы (5), $u(t, t_0, x^0) = \widehat{u}\big(x(t, t_0, x^0)\big)$, тогда $u(t, t_0, x^0)$ — оптимальное (в смысле быстродействия) управление системы (3) для точки $(t_0, x^0) \in D$;

2) всякое нетривиальное решение (в смысле А.Ф. Филиппова, см. [2]) системы (5), начинающееся в D, экспоненциально стремится к нулю при $t \to \infty$, но не входит в нуль за конечное время.

Это происходит потому (см. рис. 1), что решения Каратеодори системы (5), начинающиеся на горизонтальной оси, являются решениями системы $\dot{x}_1 = -x_1 - 1$, $\dot{x}_2 = x_2$ (если $x_1^0 > 0$), а решения Филиппова — решениями системы $\dot{x}_1 = -x_1$, $\dot{x}_2 = x_2$ (при

$x_1 > 0$). Следовательно, в данном примере не существует устойчивого (к возмущениям на множествах меры нуль), позиционного управления, оптимального в смысле быстродействия.

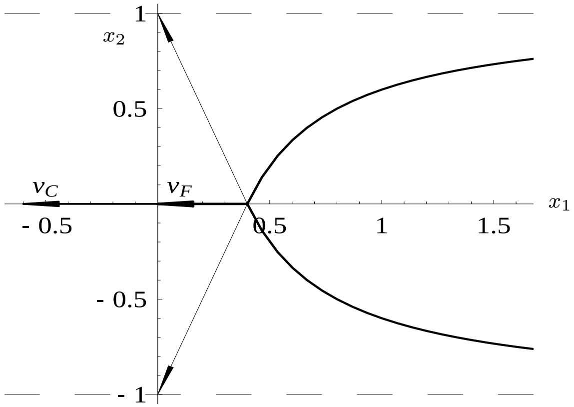

Рис. 1. Векторы скорости v_C и v_F решений системы (5) определенные по Каратеодори (программное управление) и А.Ф. Филиппову (позиционное управление). Вектор v_F «упирается» в начало координат и не позволяет фазовым точкам войти в нуль за конечное время

2. Постановка задачи

Пусть $\mathfrak{D}$ — открытое множество в $\mathbb{R}^{1+n}$, содержащее внутри себя цилиндр $\mathfrak{D}_r \doteq \mathbb{R} \times O_r^n$, где $O_r^n \doteq \{x \in \mathbb{R}^n\colon\ |x| < r\}$. Предположим, что уравнение (1) (будем называть его *основным*) допускает в $\mathfrak{D}$ позиционное управление $u(t, x)$, оптимальное в смысле быстродействия в нуль. Это означает следующее: всякой точке $(t_0, x_0) \in \mathfrak{D}$ отвечает число $\tau(t_0, x_0)$ (время быстродействия) такое, что решение $x(t, t_0, x_0)$ уравнения (1) (понимаемое в смысле А.Ф. Филиппова) обращается в нуль при $t = t_0 + \tau(t_0, x_0)$ и программное управление $u_0(t) = u\big(t, x(t, t_0, x_0)\big)$ является оптимальным в смысле быстродействия для уравнения (1) из точки (t_0, x_0) в точку $(t_0 + \tau, 0)$.

Рассмотрим теперь семейство $\mathcal{W}$ уравнений

$$\dot{x} = v(t, x, u) + w(t, x, u), \quad (t, x) \in \mathbb{R}^{1+n}, \quad u \in U. \tag{6}$$

При каких условиях: 1) существует открытое множество $\mathfrak{D}_0 \subseteq \mathfrak{D}$ содержащее внутри себя цилиндр $\mathfrak{O}_\varepsilon$ (при некотором $\varepsilon > 0$) такое, что управление $u(t,x)$ является позиционным (т. е. переводит за конечное время точки из $\mathfrak{D}_0$ на $\mathbb{R} \times \{0\}$) одновременно для всех уравнений из семейства $\mathcal{W}$;

2) для уравнений вида (6) «близких» к основному, управление $u(t,x)$ «близкó» к оптимальному (в смысле быстродействия), т. е. для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что из неравенства $|w(t,x,u)| \leqslant \delta$ при $(t,x,u) \in \mathfrak{D}_0 \times U$ следует неравенство $|\vartheta(t_0,x_0) - \tau(t_0,x_0)| \leqslant \varepsilon$, $(t_0,x_0) \in \mathfrak{D}_0$, где $\vartheta(t_0,x_0)$ — время перехода решения $x_w(t,t_0,x_0)$ уравнения (6) в нуль.

З а м е ч а н и е 1. В идейном смысле такое управление аналогично *универсальной стратегии*, введенной Н.Н. Красовским [3, § 7, с.67] для дифференциальных игр (см. также [4]).

В этой статье предпринята попытка описания семейства $\mathcal{W}$ нелинейных нестационарных уравнений с одним входом, основным уравнением для которого служит так называемое «докритическое» уравнение (определение докритичности дано в пункте 3). Идея доказательства формулируемого в пункте 8 утверждения состоит в применении функции быстродействия $\tau(t,x)$ основного уравнения в качестве функции Ляпунова для семейства $\mathcal{W}$. При некоторых дополнительных условиях производная функции $\tau(t,x)$ вдоль движений $\mathcal{W}$-семейства отрицательна и более того, отделена от нуля некоторой отрицательной константой. Этого вполне достаточно для того, чтобы всякое решение, оказавшееся вблизи нуля, входило в нуль за конечное время. Сложность такого подхода связана с недифференцируемостью $\tau(t,x)$ на некоторых поверхностях. Если однако, поверхности недифференцируемости оказываются гладкими многообразиями и $\tau(t,x)$ дифференцируема по направлениям, касательным к этим многообразиям, то, с некоторыми оговорками, описанная методика вычисления производной $\tau(t,x)$ вдоль движений $\mathcal{W}$-семейства сохраняется. Таким образом, основная нагрузка в обосновании предложенной методики ложится на изучение уравнения Беллмана для $\tau(t,x)$ (п. 6).

Статья написана под влиянием бесед о проблемах позиционного управления с Н.Н. Субботиной и В.С. Пацко на симпозиуме IFAC (Nonsmooth and Discontinuous Problems of Control and Optimization, Chelyabinsk, Russia, 17–20 June, 1998).

3. Основные определения и обозначения

Напомним, что если M и N — многообразия класса C^r ($r \geqslant 1$), вложенные в конечномерные пространства и f — отображение из M в N, то (см., например [5]) f принадлежит классу C^k ($k \leqslant r$) в точке $p \in M$, если для любой k раз непрерывно дифференцируемой кривой $p: (-1, 1) \to M$, проходящей через точку p ($p(0) = p$), функция $\varepsilon \to f(p(\varepsilon))$ из $(-1, 1)$ в N принадлежит классу C^k в точке $\varepsilon = 0$. Далее, отображение $df(p)\colon T_pM \to T_qN$, действующее из пространства T_pM, касательного к M в точке p в пространство T_qN, касательное к N в точке $q = f(p)$ и определенное равенством $df(p)v = df(p(\varepsilon))/d\varepsilon|_{\varepsilon=0}$ для всякой C^k-кривой $p\colon (-1, 1) \to M$ ($p(0) = p$, $dp(\varepsilon)/d\varepsilon|_{\varepsilon=0} = v \in T_pM$), называется производной отображения f в точке p (производной f по направлению $v \in T_pM$ в точке p). Отображение $f\colon M \to N$ называется C^k-*диффеоморфизмом*, если оно принадлежит классу C^k и имеет обратное того же класса. *Если $f\colon M \to N$ отображение класса C^k и $df(p)$ — изоморфизм для каждого $p \in M$, то f — диффеоморфизм класса C^k.*

Линейная управляемая система

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^{1+n}, \quad |u| \leqslant 1, \tag{7}$$

где функции $A\colon \mathbb{R} \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$, $b\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ непрерывны, называется *докритической* [6, 7], если $\sigma(t) > 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Здесь функция $t \to \sigma(t)$ определена для каждого $t = t_0$, как точная верхняя грань таких σ, что на $[t_0, t_0 + \sigma)$ функции

$$\xi_1(t) \doteq \psi_1(t)b(t), \ldots, \xi_n(t) \doteq \psi_n(t)b(t), \tag{8}$$

построенные по базису $\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)$ решений сопряженной системы
$$\dot{\psi} = -\psi A(t),$$
образуют чебышевскую систему функций (сокращенно T-систему) на $[t_0, t_0+\sigma)$ (т. е. любая нетривиальная линейная комбинация функций (8) имеет на $[t_0, t_0+\sigma)$ не более $n-1$ геометрически различных нулей). Функция $t \to \sigma(t)$ может иметь разрывы (в том числе бесконечные), но в каждой точке t_0, где $\sigma(t)$ разрывна, имеет место неравенство $\sigma(t_0-0) < \sigma(t_0+0)$ (см. [7, 8]).

Пусть $\tau_n(t_0, x_0)$ — время быстродействия для системы (7) из точки $x(t_0) = x_0$ в начало координат,
$$D_{\sigma(t)}(t) \doteq \{x \in \mathbb{R}^n \colon \tau_n(t,x) \leqslant \sigma(t+0)\}$$
— *множество управляемости* в нуль системы (7) на отрезке $[t, t+\sigma(t)]$, $\mathfrak{D} \doteq \mathbb{R} \times D_{\sigma(t)}(t)$ — *расширенное множество управляемости.*

4. Многообразия $\mathcal{N}^{1+k}$

Для каждого $k = 0, 1, \ldots, n$ и любого $t \in \mathbb{R}$ определим многообразия $\mathcal{M}^k(t)$, где $\mathcal{M}^0(t) \doteq \{0\}$,
$$\mathcal{M}^k(t) \doteq \{(\tau_{n-k+1}, \ldots, \tau_n) \colon 0 < \tau_{n-k+1} < \cdots < \tau_n < \sigma(t)\}, \qquad (9)$$
$k = 1, \ldots, n$ и многообразия $\mathcal{M}^{1+k} = \mathbb{R} \times \mathcal{M}^k(t)$. Всякой точке $p = (t, \tau) \in \mathcal{M}^{1+k}$, $\tau \doteq (\tau_{n-k+1}, \ldots, \tau_n)$, поставим в соответствие точку $q = (t, x)$, где $x = 0$ при $k = 0$, а при $k \in \{1, \ldots, n\}$, точка $x(p) = F_0(p)$ определена равенством
$$F_0(p) = -\sum_{i=n-k}^{n-1} (-1)^{i-n+k} \int\limits_{t+\tau_i}^{t+\tau_{i+1}} X(t,s) b(s)\, ds, \quad \tau_{n-k} = 0. \qquad (10)$$

Таким образом, для каждого k задана функция $p \to F(p) = q$ с областью определения $\mathcal{M}^{1+k}$ и областью значений $\mathcal{N}_+^{1+k}$, где

$\mathcal{N}_+^{1+k} \doteq F(\mathcal{M}^{1+k})$ (нижний индекс у $\mathcal{N}_+^1$ опускаем). Из равенства $\mathcal{M}^{1+k} = \mathbb{R} \times \mathcal{M}^k(t)$ следует равенство $F = (1, F_0)$, где функция $F_0 \colon \mathcal{M}^k(t) \to \mathbb{R}^n$ определена равенством (10). Обозначим $\mathcal{N}_+^k(t) = F_0\big(\mathcal{M}^k(t)\big)$.

Для F имеет место равенство $F(p + \delta p) = F(p) + dF(p)\delta p + o(|\delta p|)$, где $dF(p) = \operatorname{col}(1, 0, \ldots, 0)$ при $k = 0$,

$$dF(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ell_{n-k}(p) & \ell_{n-k+1}(p) & \ldots & \ell_n(p) \end{pmatrix} \tag{11}$$

при $k \in \{1, \ldots, n\}$. Здесь векторы

$$\ell_{n-k}(p),\ \ell_{n-k+1}(p),\ \ldots,\ \ell_n(p) \tag{12}$$

определены равенствами

$$\ell_{n-k}(p) = \frac{\partial x(p)}{\partial t} = A(t)x(p) + b(t) + \ell_{n-k+1}(p) + \cdots + \ell_n(p),$$

$$\ell_i(p) = \frac{\partial x(p)}{\partial \tau_i} = 2(-1)^{i-n+k} X(t, t+\tau_i) b(t+\tau_i),\ i = n-k+1, \ldots, n-1,$$

$$\ell_n(p) = \frac{\partial x(p)}{\partial \tau_n} = (-1)^k X(t, t+\tau_n) b(t, t+\tau_n).$$

В [6] показано, что при каждом фиксированном $p \in \mathcal{M}^{1+k}$ векторы (12) линейно независимы, поэтому столбцы матрицы $dF(p)$ тоже линейно независимы. Следовательно $dF(p)$ — изоморфизм пространства $T_p\mathcal{M}^{1+k}$, касательного к многообразию $\mathcal{M}^{1+k}$ в точке p, в пространство $T_q\mathcal{N}_+^{1+k}$, касательное к многообразию $\mathcal{N}_+^{1+k}$ в точке $q = F(p)$. Кроме того, функция $p \to dF(p)$ принадлежит классу C^r и поэтому F — диффеоморфизм класса C^{r+1}. Следовательно, для каждого $k = 0, 1, \ldots, n$, многообразие $\mathcal{N}_+^{1+k}$ является гладким многообразием класса C^{r+1}.

Для дальнейшего важно, что пространство $T_p\mathcal{M}^{1+k}$ представимо в виде $T_p\mathcal{M}^{1+k} = \mathbb{R} \times T_\tau\mathcal{M}^k(t)$, где $T_\tau\mathcal{M}^k(t)$ — пространство, касательное к $\mathcal{M}^k(t)$ в точке τ. Далее, так как изоморфизм $dF(p)$ можно записать в виде $dF(p) = \big(1, dF_0(p)\big)$, где

$dF_0(p) = \big(\ell_{n-k}(p), \ell_{n-k+1}(p), \dots, \ell_n(p)\big)$, то пространство $T_q\mathcal{N}_+^{1+k}$, касательное к $\mathcal{N}_+^{1+k}$ в точке $q = (t, x)$, имеет представление $T_q\mathcal{N}_+^{1+k} = \mathbb{R} \times T_x\mathcal{N}_+^k(t)$, где $T_x\mathcal{N}_+^k(t)$ — пространство, касательное к $\mathcal{N}_+^k(t)$ в точке x. Поэтому всякий вектор $\delta q \in T_q\mathcal{N}_+^{1+k}$ представим в виде $\delta q = (\delta t, \delta x)$, где $\delta x \in T_x\mathcal{N}_+^k(t)$. Вектор δx может быть разложен по базису (12):

$$\delta x = \ell_{n-k}(p)\delta t + \ell_{n-k+1}(p)\delta\tau_{n-k+1} + \dots + \ell_n(p)\delta\tau_n.$$

Здесь $p = F^{-1}(q) = \big(t, \tau(t, x)\big)$, $(\delta\tau_{n-k+1}, \dots, \delta\tau_n)$ — координаты вектора δx в базисе (12).

Построенные многообразия $\mathcal{N}_+^{1+k}$ обладают тем свойством, что для точек $(t_0, x_0) \in \mathcal{N}_+^{1+k}$ оптимальное (в смысле быстродействия) программное управление $u_0(t)$ равно $+1$ на интервале $\big[t_0, t_0 + \tau_{n-k+1}(t_0, x_0)\big)$. Аналогичным образом строятся многообразия $\mathcal{N}_-^{1+k}$, $k = 1, \dots, n$ (в этом случае оптимальное управление $u_0(t)$ равно -1 на первом интервале).

5. Оптимальное управление

В [6] доказаны следующие утверждения.

Л е м м а 1. *Допустим, что система* (7) *докритическая. Тогда расширенное множество управляемости* $\mathfrak{D}$ *системы* (7) *представимо в виде*

$$\mathfrak{D} = \operatorname{cl}\left(\mathfrak{N}_+^{1+n} \bigcup \mathfrak{N}_-^{1+n}\right),$$

где

$$\mathfrak{N}_+^{1+k} = \mathcal{N}_+^{1+k} \bigcup \mathcal{N}_-^{k} \bigcup \mathcal{N}_+^{k-1} \bigcup \dots \bigcup \mathcal{N}^{1}, \tag{13}$$

$$\mathfrak{N}_-^{1+k} = \mathcal{N}_-^{1+k} \bigcup \mathcal{N}_+^{k} \bigcup \mathcal{N}_-^{k-1} \bigcup \dots \bigcup \mathcal{N}^{1}, \tag{14}$$

$k = 0, \dots, n$. *Многообразия* $\mathfrak{N}_+^{1+k}$, $\mathfrak{N}_-^{1+k}$ *слабо инвариантны, и для каждого* $k = 0, \dots, n$, *многообразие* $\mathfrak{N}_+^k \bigcup \mathfrak{N}_-^k$ *является общим краем многообразий* $\operatorname{cl}\mathfrak{N}_+^{1+k}$ *и* $\operatorname{cl}\mathfrak{N}_-^{1+k}$.

Т е о р е м а 1. *Допустим, что система* (7) *докритическая. Тогда функция*

$$\widehat{u}(t,x)=\begin{cases}1, & \text{если} \quad (t,x)\in\mathcal{N}_{+}^{1+n}\\ -1, & \text{если} \quad (t,x)\in\mathcal{N}_{-}^{1+n}\end{cases} \qquad (t,x)\in\operatorname{int}\mathfrak{D}, \tag{15}$$

является оптимальным в смысле быстродействия позиционным управление для системы (7).

6. Уравнение Беллмана

Для каждого $k=0,1,\ldots,n$ обозначим

$$\mathcal{N}^{1+k}=\mathcal{N}_{+}^{1+k}\bigcup\mathcal{N}_{-}^{1+k}, \quad \mathfrak{N}^{1+k}=\mathfrak{N}_{+}^{1+k}\bigcup\mathfrak{N}_{-}^{1+k}.$$

где $\mathfrak{N}_{\pm}^{1+k}$ определены равенствами (13), (14). Тогда $\mathfrak{D}=\operatorname{cl}\mathfrak{N}^{1+n}$ и для любой точки $(t_0,x_0)\in\operatorname{int}\mathfrak{D}$, где $x_0\neq 0$, найдется максимальное $k\in\{0,\ldots,n-1\}$ такое, что $(t_0,x_0)\in\mathfrak{N}^{1+n-k}$ и $(t_0,x_0)\notin\mathfrak{N}^{n-k}$.

Для каждого фиксированного $i\in\{1,\ldots,n\}$ и любой точки $(t_0,x_0)\in\operatorname{int}\mathfrak{D}$ обозначим $\tau_i(t_0,x_0)$ — время быстродействия для системы (7) на многообразие $\mathfrak{N}^{1+n-i}$. Таким образом, $\tau_i(t_0,x_0)$ является решением задачи

$$\begin{gathered}\dot{x}=A(t)x+b(t)u(t), \quad |u(t)|\leqslant 1, \quad (t_0,x_0)\in\mathfrak{D},\\ \big(t_0+\vartheta,x\big(t_0+\vartheta,t_0,x_0,u(\cdot)\big)\big)\in\mathfrak{N}^{1+n-i},\\ \vartheta\big(u(\cdot)\big)\longrightarrow\min,\end{gathered} \tag{16}$$

где $x\big(t,t_0,x_0,u(\cdot)\big)$ — решение системы (7) при управлении $u(t)$ (если $(t_0,x_0)\in\mathfrak{N}^{1+n-i}$, то полагаем $\tau_i(t_0,x_0)=0$).

Вектор $\tau(t,x)=\big(\tau_1(t,x),\ldots,\tau_n(t,x)\big)$ будем называть *вектором быстродействия*. Вектор быстродействия определен для всех $(t,x)\in\operatorname{int}\mathfrak{D}$.

Пусть $\theta(t,x)$ — непрерывная скалярная функция, определенная для всех $(t,x)\in\mathcal{N}^{1+k}$ при некотором $k=0,\ldots,n$; $(\delta t,\delta x)$ — вектор в касательном пространстве $T_{(t,x)}\mathcal{N}^{1+k}$ к $\mathcal{N}^{1+k}$. Рассмотрим функцию $\varepsilon\to q(\varepsilon)\in\mathcal{N}^{1+k}$, заданную равенством $q(\varepsilon)=\big(t+$

$\varepsilon\delta t, x+\varepsilon\delta x+o(\varepsilon)\big)$. Производная $d\theta(t,x)$, определенная равенством $d\theta(t,x)(\delta t,\delta x) \doteq d\theta\big(q(\varepsilon)\big)/d\varepsilon|_{\varepsilon=0}$, задает линейный функционал $d\theta(t,x)$, действующий из $T_{(t,x)}\mathcal{N}^{1+k}$ в $\mathbb{R}$. Так как $T_{(t,x)}\mathcal{N}^{1+k} = \mathbb{R}\times T_x\mathcal{N}^k(t)$, то $d\theta(t,x) = \big(d_t\theta(t,x), d_x\theta(t,x)\big)$, где линейный функционал $d_x\theta(t,x)\colon\ T_x\mathcal{N}^k(t)\to\mathbb{R}$ определен равенством $d_x\theta(t,x)(\delta x) = d\theta\big(t, x+\varepsilon\delta x+o(\varepsilon)\big)/d\varepsilon|_{\varepsilon=0}$.

Т е о р е м а 2. *Допустим, что система* (7) *докритическая. Каждая координата* $\tau_i(t,x)$ *вектора быстродействия*:

(a) *непрерывна в* $\operatorname{int}\mathfrak{D}$;

(b) *непрерывно дифференцируема в* $\mathcal{N}^{1+n}$;

(c) *при* $(t,x)\in\mathcal{N}^{1+k}$, $k\in\{0,\dots,n-1\}$, *дифференцируема по любому направлению, лежащему в касательном пространстве* $T_{(t,x)}\mathcal{N}^{1+k}$ *к многообразию* $\mathcal{N}^{1+k}$ *в точке* (t,x).

(d) *является решением задачи*

$$d\theta(t,x)h(t,x) = -1, \quad \theta(t,x)|_{(t,x)\in\mathfrak{N}^{1+n-i}} = 0, \tag{17}$$

где $d\theta(t,x)h(t,x)$ — *производная функции* $\theta(t,x)$ *в точке* (t,x) *по направлению вектора* $h(t,x) = \big(1, A(t)x+\nu(t,x)b(t)\big)$,

$$\nu(t,x) = \begin{cases} 1, & \textit{если} \quad (t,x)\in\mathcal{N}_+^2\bigcup\cdots\bigcup\mathcal{N}_+^{1+n}, \\ 0, & \textit{если} \quad (t,x)\in\mathcal{N}^1, \\ -1, & \textit{если} \quad (t,x)\in\mathcal{N}_-^2\bigcup\cdots\bigcup\mathcal{N}_-^{1+n}; \end{cases} \tag{18}$$

(e) *в частности, при* $(t,x)\in\mathcal{N}_+^{1+n}$ *функция* $\tau_i(t,x)$ *удовлетворяет уравнению*

$$\frac{\partial\theta(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial\theta(t,x)}{\partial x}\big(A(t)x+b(t)\big) = -1,$$

а при $(t,x)\in\mathcal{N}_-^{1+n}$ — *уравнению*

$$\frac{\partial\theta(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial\theta(t,x)}{\partial x}\big(A(t)x-b(t)\big) = -1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В [6, теоремы 6 и 7] показано, что функции $\tau_i(t,x)$, $i=1,\ldots,n$, непрерывны, непрерывно дифференцируемы в $\mathcal{N}^{1+n}$, дифференцируемы по всем направлениям, лежащим в касательном пространстве $T_{(t,x)}\mathcal{N}^{1+k}$ к многообразию $\mathcal{N}^{1+k}$, $k=0,\ldots,n-1$ и оптимальное управление для задачи (16) определено равенством (15). Учитывая, что решения Филиппова инвариантны относительно изменений правой части системы на множествах меры нуль, а множество $\mathfrak{N}^n$ имеет меру Лебега равную нулю, доопределим управление (15) до функции (18); при этом движения системы (7) при $u=\widehat{u}(t,x)$ и $u=\nu(t,x)$ не изменятся, но теперь (как показано в [6, теорема 7]) всякое решение Филиппова системы (7) при $u=\widehat{u}(t,x)$ совпадает с решением Каратеодори системы (7) при $u=\nu(t,x)$.

Покажем, что $\tau_i(t,x)$ является решением задачи (16). Пусть $\bigl(t,\widehat{x}(t)\bigr)$ — оптимальное движение в задаче (16). Тогда, непосредственно из определения $\tau_i(t,x)$, имеем равенство

$$t+\varepsilon+\tau_i\bigl(t+\varepsilon,\widehat{x}(t+\varepsilon)\bigr)=t+\tau_i\bigl(t,\widehat{x}(t)\bigr)\,,\quad t\,,t+\varepsilon\geqslant t_0\,. \tag{19}$$

Допустим, что при некотором t точка $\bigl(t,\widehat{x}(t)\bigr)$ находится на одном из многообразий $\mathcal{N}^{1+k}$, где $k\in\{1+n-i,\ldots,n-1\}$. Для определенности будем считать, что $\bigl(t,\widehat{x}(t)\bigr)\in\mathcal{N}_+^{1+k}$. Тогда (см. (11)) вектор $h\bigl(t,\widehat{x}(t)\bigr)\doteq\bigl(1,A(t)\widehat{x}(t)+b(t)\bigr)\in T_{(t,\widehat{x}(t))}\mathcal{N}_+^{1+k}$, причем включение $h\bigl(t+\varepsilon,\widehat{x}(t+\varepsilon)\bigr)\in T_{(t+\varepsilon,\widehat{x}(t+\varepsilon))}\mathcal{N}_+^{1+k}$ сохранится для всех ε достаточно близких к нулю. Поэтому имеет место включение $\bigl(t+\varepsilon,\widehat{x}(t+\varepsilon)\bigr)\in\mathcal{N}_+^{1+k}$ (при ε близких к нулю), доказательство которого следует из теоремы 1.1 (стр. 110) работы [9]. Так как $\widehat{x}(t+\varepsilon)=\widehat{x}(t)+\varepsilon\bigl(A(t)x+b(t)\bigr)+o(\varepsilon)$, то из (19) получаем равенство

$$\varepsilon^{-1}\Bigl[\tau_i\bigl(t+\varepsilon,\widehat{x}(t)+\varepsilon\bigl(A(t)x+b(t)\bigr)+o(\varepsilon)\bigr)-\tau_i\bigl(t,\widehat{x}(t)\bigr)\Bigr]=-1\,,$$

приводящее (при $\varepsilon\to 0$) к равенству $d\tau_i\bigl(t,\widehat{x}(t)\bigr)h\bigl(t,\widehat{x}(t)\bigr)=-1$, из которого, в свою очередь, получаем при $t=t_0$ равенство $d\tau_i(t_0,x_0)h(t_0,x_0)=-1$, доказывающее утверждение (d) теоремы. Утверждение (e) следует из (d). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 2. Из представления $d\theta(t,x)$ в виде $\big(d_t\theta(t,x), d_x\theta(t,x)\big)$ следует, что задача (17) эквивалентна задаче

$$d_t\theta(t,x) + d_x\theta(t,x)\big(A(t)x + \nu(t,x)b(t)\big) = -1,$$
$$\theta(t,x)|_{x\in\mathfrak{N}^{n-i}(t)} = 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

где $\mathfrak{N}^{n-i}(t) = \bigcup_{k=0}^{n-i}\big(\mathcal{N}_+^k(t) \bigcup \mathcal{N}_-^k(t)\big)$.

7. Стационарная система

Для стационарной системы

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad A, b \equiv \text{const}, \quad |u| \leqslant 1, \tag{20}$$

пространство $\mathbb{R}^n$ служит естественным фазовым пространством (мы предполагаем, что допустимыми являются управления $u(x)$, не зависящие от t); функция $\sigma(t) = \sigma$ не зависит от t и неравенство $\sigma > 0$ выполнено в том и только том случае, если $\det(b, Ab, \dots,$
$A^{n-1}b) \neq 0$. Расширенное множество управляемости $\mathfrak{D}$ системы (20) представляет из себя цилиндр $\mathbb{R} \times D_\sigma$; каждое многообразие $\mathcal{M}^k(t)$ (см. (9)) не зависит от t (обозначим его M^k), поэтому многообразия $\mathcal{N}_\pm^{1+k}$ имеют представление $\mathcal{N}_\pm^{1+k} = \mathbb{R} \times N_\pm^k$, где $N_\pm^k = F_\pm(M^k)$, а отображения $F_\pm \colon M^k \to \mathbb{R}^n$ определены равенствами (см. (10))

$$F_\pm(\tau_{n-k+1}, \dots, \tau_n) = \mp \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_{rk} A^r b, \quad k = 1, \dots, n. \tag{21}$$

Здесь $\alpha_{rk} = \alpha_{rk}(\tau_{n-k+1}, \dots, \tau_n) =$

$$= \frac{(-1)^{r-n+k}}{(r+1)!} \sum_{i=n-k}^{n-1} (-1)^i \big(\tau_{i+1}^{r+1} - \tau_i^{r+1}\big), \quad \tau_{n-k} = 0, \quad r = 0, 1, \dots .$$

Если $\det A \neq 0$, то из (10) (или из (21)) следуют равенства

$$F_\pm(\tau_{n-k+1}, \dots, \tau_n) = \pm \sum_{i=n-k}^{n-1} (-1)^{i-n+k} \Big(\exp A(\tau_i - \tau_{i+1})\Big) A^{-1} b.$$

Таким образом, для стационарной системы все события разворачиваются в D_σ: задача (16) переходит в задачу

$$\begin{gathered}\dot x = Ax + bu(x), \quad |u(x)| \leqslant 1, \quad x(0) = x_0 \in D_\sigma\,,\\ x\big(\vartheta, x_0, u(\cdot)\big) \in N^0 \bigcup \cdots \bigcup N^{n-i}\,,\\ \vartheta\big(u(\cdot)\big) \longrightarrow \min\,,\end{gathered}$$

где $x\big(t, x_0, u(\cdot)\big)$ — решение системы (20), отвечающее управлению $u(x)$, $N^k = N^k_+ \bigcup N^k_-$, $i = 1, \ldots, n$, $N^0_\pm = \{0\}$; вектор быстродействия $\tau(x) = \big(\tau_1(x), \ldots, \tau_n(x)\big)$ не зависит от t и для координат $\tau_i(x)$ имеет место следующий аналог теоремы 2.

Т е о р е м а 3. *Пусть* $\det(b, Ab, \ldots, A^{n-1}b) \neq 0$. *Каждая координата* $\tau_i(x)$ *вектора быстродействия* $\tau(x)$ *непрерывна в* $\operatorname{int} D_\sigma$; *непрерывно дифференцируема в* $N^n_+ \bigcup N^n_-$; *при* $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ *дифференцируема по любому направлению, лежащему в касательном пространстве* $T_x N^k$ *к многообразию* N^k *в точке* $x \in N^k$ *и является решением задачи*

$$d\eta(x)\big(Ax + \zeta(x)b\big) = -1, \quad \eta(x)|_{x \in N^{n-i}} = 0,$$

где $d\eta(x)v$ — *производная* $\eta(x)$ *в точке* $x \in N^k$ *по направлению вектора* $v \in T_x N^k$,

$$\zeta(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x \in N^1_+ \bigcup \cdots \bigcup N^n_+\,,\\ 0, & \text{если} \quad x = 0\,,\\ -1, & \text{если} \quad x \in N^1_- \bigcup \cdots \bigcup N^n_-\,. \end{cases}$$

В частности, при $x \in N^n$ *функции* $\tau_i(x)$ *удовлетворяют уравнению*

$$\frac{\partial \eta(x)}{\partial x}\big(Ax + \zeta(x)b\big) = -1, \quad x \in N^n_+ \bigcup N^n_-\,.$$

8. Семейство $\mathcal{W}$

Рассмотрим систему уравнений

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u + w(t,x), \quad (t,x) \in \mathbb{R}^{1+n}, \quad |u| \leqslant 1, \tag{22}$$

где функции $A\colon \mathbb{R} \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$, $b\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ непрерывны, функция $w\colon \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям Каратеодори, $w(t,0) \equiv 0$ и существует такое $r > 0$, что для линейной системы (7) при всех $t \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство $\sigma(t) \geqslant r$.

Обозначим $\mathfrak{O}_r \doteq \mathbb{R} \times \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x| < r\}$, $\mathfrak{D} \doteq \mathbb{R} \times D_{\sigma(t)}(t)$ — расширенное множество управляемости системы (7).

Построим многозначные функции

$$U(t,x) = \begin{cases} \widehat{u}(t,x), \text{ если} & (t,x) \in \mathcal{N}^{1+n}, \\ [-1,+1], \text{ если} & (t,x) \in \mathfrak{N}^n \end{cases}$$

и $\mathcal{F}(t,x) = A(t)x + b(t)U(t,x) + w(t,x)$. Тогда решения задачи

$$\dot{x} \in \mathcal{F}(t,x), \quad x(t_0) = x_0, \quad (t_0,x_0) \in \mathfrak{D}\,,$$

называются решениями (в смысле А.Ф. Филиппова [2]) задачи

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)\widehat{u}(t,x) + w(t,x), \quad x(t_0) = x_0\,. \tag{23}$$

Пусть точка $q = (t,x) \in \mathfrak{N}^n$, обозначим $\mathfrak{T}(q)$ — контингентный конус (конус Булигана) к $\mathfrak{N}^n$ в точке q. По определению (см. [9], или [10, стр. 28]) вектор $\delta q = (\delta t, \delta x)$ принадлежит $\mathfrak{T}(q)$ в том и только том случае, если

$$\liminf_{\varepsilon \to +0} \frac{\rho_0(q + \varepsilon\delta q, \mathfrak{N}^n)}{\varepsilon} = 0\,, \tag{24}$$

где $\rho_0(q,Q)$ — евклидово расстояние точки q до множества Q. Непосредственно из (24) следует, что если $q \in \mathcal{N}^n$, то $\mathfrak{T}(q) = T_q\mathcal{N}^n$, если $q \in \mathcal{N}^{1+k}$ при $k \in \{0,\ldots,n-2\}$, то $T_q\mathcal{N}^{1+k} \subset \mathfrak{T}(q)$.

Л е м м а 2 (следствие теоремы 1.1 работы [9]). *Если для всех* $q=(t,x)\in\mathfrak{N}^n$, *за исключением точки* $q_0=(t,0)$, *пересечение* $\mathfrak{T}(q)\bigcap\mathcal{F}(q)$ *пусто, то всякое движение* $q(t)=\bigl(t,x(t)\bigr)$ *системы* (23), *за исключением движения* $q_0=(t,0)$, *«прошивает» множество* $\mathfrak{N}^n$, *т. е. если* $q(t_0)\in\mathfrak{N}^n$ *и* $x_0\neq 0$, *то найдется* $\varepsilon>0$ *такое, что* $q(t)\notin\mathfrak{N}^n$ *для всех* $t\in(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)\setminus\{t_0\}$.

Далее, если существует движение $q(t)$ *системы* (23) *такое, что* $\mathfrak{T}\bigl(q(t)\bigr)\bigcap\mathcal{F}\bigl(q(t)\bigr)\neq\varnothing$ *для всех* $t\in[t_0,t_0+\varepsilon)$, *то* $q(t)\in\mathfrak{N}^n$ *при* $t\in[t_0,t_0+\varepsilon]$. *В частности, если* $\mathfrak{T}(q)\bigcap\mathcal{F}(q)\neq\varnothing$ *для всех* $q\in\mathfrak{N}^n$, *то множество* $\mathfrak{N}^n$ *положительно инвариантно* (*т. е. всякое движение, начинающееся в* $\mathfrak{N}^n$ *при* $t=t_0$, *остается в* $\mathfrak{N}^n$ *при всех* $t\geqslant t_0$).

В формулируемой ниже теореме описан класс допустимых возмущений (см. постановку задачи) основного уравнения (7).

Т е о р е м а 4. *Пусть существует открытое множество* $\mathfrak{D}_0$ *такое, что* $\mathfrak{O}_r\subseteq\mathfrak{D}_0\subseteq\mathfrak{D}$ *и при всех* $(t,x)\subseteq\mathfrak{D}_0$ *и некотором* $\alpha>0$ *выполнено неравенство*

$$d_x\tau_n(t,x)w(t,x)\leqslant 1-\alpha\,,\quad (t,x)\subseteq\mathfrak{D}_0\,. \tag{25}$$

Тогда управление $\widehat{u}(t,x)$, *определенное равенством* (15), *служит позиционным управлением для системы* (22) *в области* $\mathfrak{D}_0$, *т. е. для каждой точки* $(t_0,x_0)\in\mathfrak{D}_0$ *найдется момент времени* $\vartheta(t_0,x_0)<\infty$ *такой, что любое решение* $x(t,t_0,x_0)$ *задачи* (23) *существует и* $x(t_0+\vartheta(t_0,x_0),t_0,x_0)=0$. *Далее, для всякого* $\varepsilon>0$ *найдется* $\delta>0$ *такое, что если* $|w(t,x)|\leqslant\delta$ *при* $(t,x)\in\mathfrak{D}_0$, *то* $|\tau_n(t,x)-\vartheta(t,x)|\leqslant\varepsilon$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть сначала точка (t_0,x_0) находится на многообразии $\mathcal{N}^{1+n}$ (следовательно $(t_0,x_0)\notin\mathfrak{N}^n$). Для определенности будем считать, что $(t_0,x_0)\in\mathcal{N}^{1+n}_+$. Обозначим $x(t)\doteq x(t,t_0,x_0)$ — решение задачи (23). Пусть далее, $\rho(t)\doteq\tau_n(t,x(t))$ — «расстояние» точки $x(t)$ от нуля. Тогда $\rho(t_0)=\tau_n(t_0,x_0)>0$ и для всех t, таких что $\bigl(t,x(t)\bigr)\in\mathcal{N}^{1+n}_+$, с учетом условия (25), получаем:

$$\dot\rho(t) = \Big(\frac{\partial \tau_n(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial \tau_n(t,x)}{\partial x}\big(A(t)x + b(t) + w(t,x)\big)\Big)\Big|_{x=x(t)} =$$

$$= -1 + \frac{\partial \tau_n(t,x(t))}{\partial x} w\big(t,x(t)\big) \leqslant -1 + 1 - \alpha = -\alpha.$$

Следовательно, $\dot\rho(t) \leqslant -\alpha$ и поэтому $\rho(t) \leqslant \rho(t_0) - \alpha(t - t_0)$. Таким образом, если точка $\big(t, x(t)\big)$ находится в $\mathcal{N}_+^{1+n}$ «достаточно долго», то найдется момент времени $\vartheta(t_0, x_0) > 0$ такой, что $\rho\big(t_0 + \vartheta(t_0,x_0)\big) = 0$. Поэтому $x\big(t_0 + \vartheta(t_0,x_0)\big) = 0$. Для $\vartheta(t_0,x_0)$ справедлива оценка $\vartheta(t_0,x_0) \leqslant \tau_n(t_0,x_0)/\alpha$.

Допустим теперь, что найдется момент времени $t = t_1 \geqslant t_0$ такой, что точка $q(t_1) = \big(t_1, x(t_1)\big) \in \mathfrak{N}^n$ и $x(t_1) \neq 0$. Если (см. лемму (2)) $\mathfrak{T}\big(q(t_1)\big) \bigcap \mathcal{F}\big(q(t_1)\big) = \varnothing$, то при движении $t \to \big(t, x(t)\big)$ точка $\big(t, x(t)\big)$ покидает $\mathfrak{N}^n$ при $t > t_1$ и тем самым снова входит в $\mathcal{N}^{1+n}$ (возможно возвращается в $\mathcal{N}_+^{1+n}$). При этом оценка $\rho(t) \leqslant \rho(t_1) - \alpha(t - t_1)$, $t \geqslant t_1$, сохраняется до следующего момента встречи с $\mathfrak{N}^n$. Поэтому

$$\rho(t) \leqslant \rho(t_1) - \alpha(t - t_1) \leqslant \rho(t_0) - \alpha(t_1 - t_0) - \alpha(t - t_1) = \rho(t_0) - \alpha(t - t_0).$$

Пусть в момент времени $t_2 \geqslant t_1$ точка $q(t_2) = \big(t_2, x(t_2)\big) \in \mathfrak{N}^n$ и $\mathfrak{T}\big(q(t)\big) \bigcap \mathcal{F}\big(q(t)\big) \neq \varnothing$ для всех $t \in (t_2, t_2 + \varepsilon)$ и некоторого $\varepsilon > 0$. Тогда (см. лемму 2) $q(t) \in \mathfrak{N}^n$ при $t \in [t_2, t_2 + \varepsilon)$. Так как вектор $h\big(t, x(t)\big) = \big(1, A(t)x(t) + \nu\big(t, x(t)\big)b(t) + w\big(t, x(t)\big)\big) \in \mathfrak{T}\big(q(t)\big)$ при $t \in (t_2, t_2 + \varepsilon)$, то при δ близких к нулю имеет место включение $x(t+\delta) = x(t) + \delta\Big(A(t)x(t) + \nu\big(t, x(t)\big)b(t) + w\big(t, x(t)\big)\Big) + o(\delta) \in \mathfrak{N}^n$. Поэтому производная $d\tau_n\big(t+\delta, x(t+\delta)\big)/d\delta|_{\delta=0}$ существует и равна $d\tau_n(t,x)h(t,x)|_{x=x(t)}$. Далее, в силу (25) справедливо неравенство $d\rho(t)/dt = d\tau_n(t,x)h(t,x)|_{x=x(t)} \leqslant -\alpha$, обеспечивающее оценку $\rho(t) \leqslant \rho(t_2) - \alpha(t - t_2)$, из которой, в свою очередь, следует оценка $\rho(t) \leqslant \rho(t_0) - \alpha(t - t_0)$. Таким образом, решение $x(t)$ уравнения (23) достигает нуля за конечное время.

Пусть $x\big(t_0+\vartheta(t_0,x_0)\big)=0$; как уже отмечалось, для $\vartheta(t_0,x_0)$ имеет место оценка $\vartheta(t_0,x_0)\leqslant\tau_n(t_0,x_0)/\alpha$. Поэтому

$$|\tau_n(t,x)-\vartheta(t,x)|\leqslant\alpha^{-1}(1-\alpha)\tau_n(t,x)\,,\quad (t,x)\in\mathfrak{D}_0\,. \tag{26}$$

Из (26) следует, что если возмущение $w(t,x)$ близкó к нулю, то, в силу (25), константа α близкá к единице, поэтому модуль разности $|\tau_n(t,x)-\vartheta(t,x)|$ близок к нулю. Теорема доказана.

9. Стационарная система с возмущением

Рассмотрим стационарную систему

$$\begin{cases}\dot x_1=x_2\\ \dot x_2=u.\end{cases} \tag{27}$$

Здесь $\sigma=\infty$, и, в силу стационарности этой системы, все траектории, а также множества $\mathcal{N}^2_\pm$ удобно наблюдать в виде проекций на плоскость $\mathbb{R}^2$ вдоль направления оси t. На рисунке 2 изображена траектория системы (27), близкая к оптимальной (все траектории этого примера выходят из точки $(1,1)$ при $u=-1$). В силу погрешности вычислительного метода говорить о точном попадании траектории в нуль некорректно, поэтому в данном (и следующем) примере решается задача о попадании в окрестность нуля. Кроме того, в силу этих же причин, невозможно абсолютно точно вычислить момент пересечения траектории с многообразием $\mathcal{N}^2_\pm$. В результате траектория совершает несколько пересечений с многообразиями $\mathcal{N}^2_+$ и $\mathcal{N}^2_-$.

Траектории возмущенной системы

$$\begin{cases}\dot x_1=x_2\\ \dot x_2=w(t,x)+u.\end{cases} \tag{28}$$

изображены на следующих двух рисунках. На рисунке 3 изображена траектория системы (28) при $w(t,x)=-0.5\sin t$. Здесь проиллюстрирован тот случай, когда после пересечения с многообразием $\mathcal{N}^2_+$ траектория не возвращается на это многообразие, а двигается до многообразия $\mathcal{N}^2_-$ и т. д.

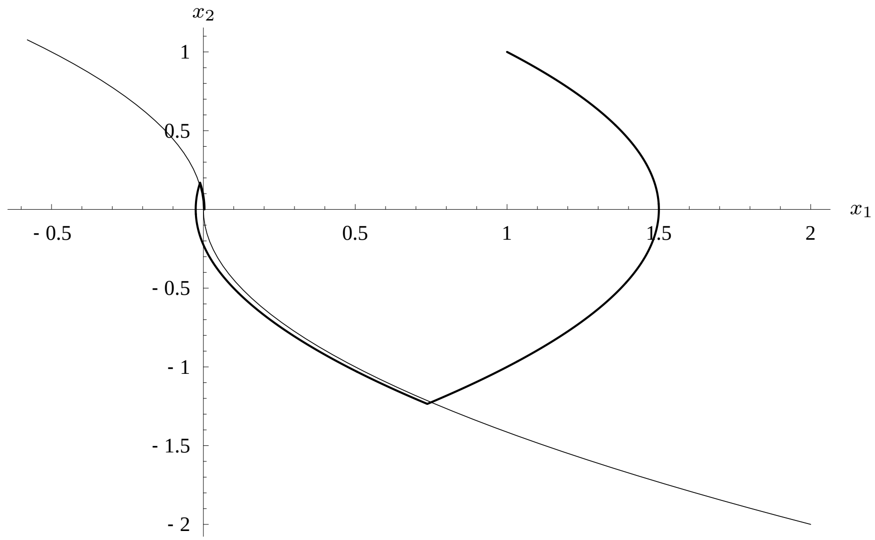

Рис. 2. Траектория системы (27), близкая к оптимальной

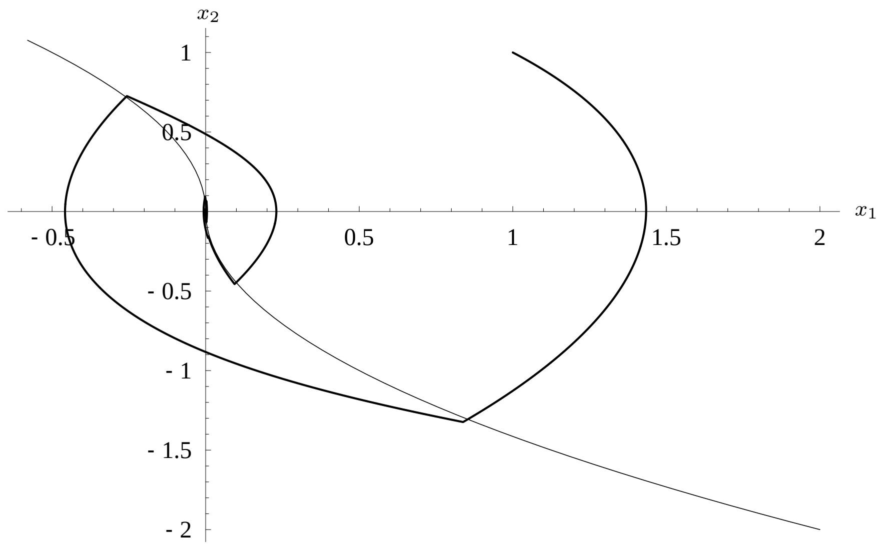

Рис. 3. Траектория возмущенной системы (28), $w(t,x) = -0.5\sin t$

На рис. 4 изображена траектория системы (28) при $w(t,x) \equiv$

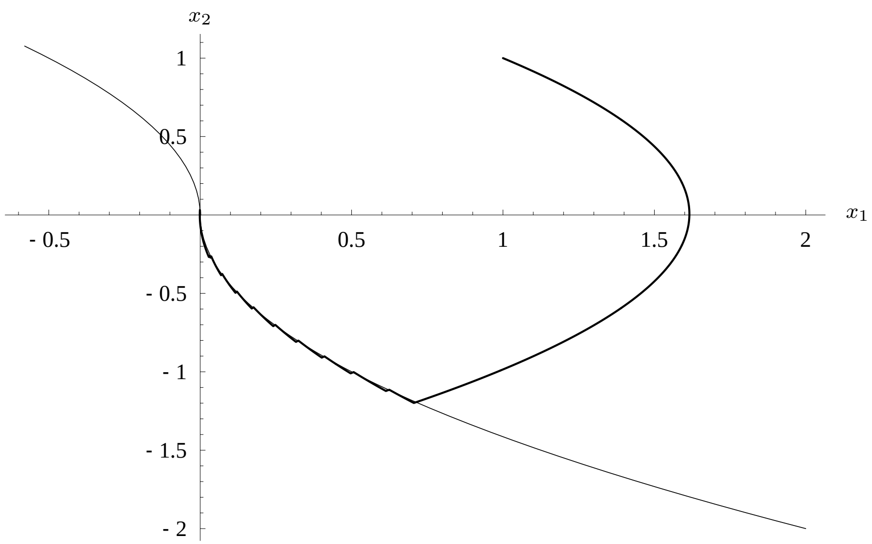

Рис. 4. Траектория возмущенной системы (28), $w = 0.2$

0.2. Здесь проиллюстрирован тот случай, когда после пересечения с многообразием $\mathcal{N}_+^2$ траектория каждый раз возвращается на это многообразие, двигаясь к нулю.

10. Маятник с подвижной точкой подвеса

Предположим, что точка подвеса маятника (длины ℓ и массы $m = 1$) движется в вертикальной плоскости и координаты точки подвеса являются заданными функциями $x_0(t)$, $y_0(t)$, времени t (x_0 — отклонение по горизонтали, y_0 — по вертикали). Тогда (см. например, [11]) уравнение относительного движения маятника имеет вид

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{g}{\ell} + \frac{1}{\ell}\ddot{y}_0(t)\right)\sin\varphi = -\frac{1}{\ell}\ddot{x}_0(t)\cos\varphi, \tag{29}$$

где φ — угол отклонения от вертикального положения, g — ускорение свободного падения. Мы предполагаем, что маятник «мало» отклоняется от нуля и вместо (29), будем изучать уравнение

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{g}{\ell} + \frac{1}{\ell}\ddot{y}_0(t)\right)\sin\varphi = u\,, \quad u = -\frac{1}{\ell}\ddot{x}_0(t)\,. \tag{30}$$

Обозначим $x_1 = \varphi$, $x_2 = \dot{\varphi}$ и перейдем от уравнения (30) к системе уравнений

$$\dot{x}_1 = x_2\,, \quad \dot{x}_2 = -\left(\frac{g}{\ell} + a(t)\right)x_1 + v(t, x_1) + u\,, \tag{31}$$

где $a(t) = \dfrac{1}{\ell}\ddot{y}_0(t)$, $v(t, x_1) = \left(\dfrac{g}{\ell} + a(t)\right)(x_1 - \sin x_1)$, а функцию $u = u(t, x)$ мы будем интерпретировать как управление и предполагать, что $|u| \leqslant 1$. Далее, допустим, что $a(t) = a_0(t) + a_1(t)$, причем непрерывная и ограниченная на $\mathbb{R}$ функция $a_0(t)$ известна точно, а функцию $a_1(t)$ будем интерпретировать как малое случайное колебание с нулевым средним. Перепишем теперь систему (31) в виде

$$\dot{x}_1 = x_2\,, \quad \dot{x}_2 = -\left(\frac{g}{\ell} + a_0(t)\right)x_1 + w(t, x_1) + u\,, \quad |u| \leqslant 1\,.$$

Здесь $w(t, x_1) = \left(\dfrac{g}{\ell} + a_0(t)\right)(x_1 - \sin x_1) - a_1(t)\sin x_1$. Задача об успокоении маятника состоит в построении позиционного управления $\widehat{u}(t, x)$ такого, что все решения $x(t, t_0, x_0)$ системы

$$\dot{x}_1 = x_2\,, \quad \dot{x}_2 = -\left(\frac{g}{\ell} + a_0(t)\right)x_1 + w(t, x_1) + \widehat{u}(t, x) \tag{32}$$

для x_0 близких к нулю, приходят в нуль за конечное время независимо от $a_1(t)$.

Для решения поставленной задачи воспользуемся теоремой 4. Можно показать, что найдется такое $r > 0$, что функция $\sigma(t)$ для линейной системы

$$\dot{x}_1 = x_2\,, \quad \dot{x}_2 = -\left(\frac{g}{\ell} + a_0(t)\right)x_1 + u\,, \quad |u| \leqslant 1\,. \tag{33}$$

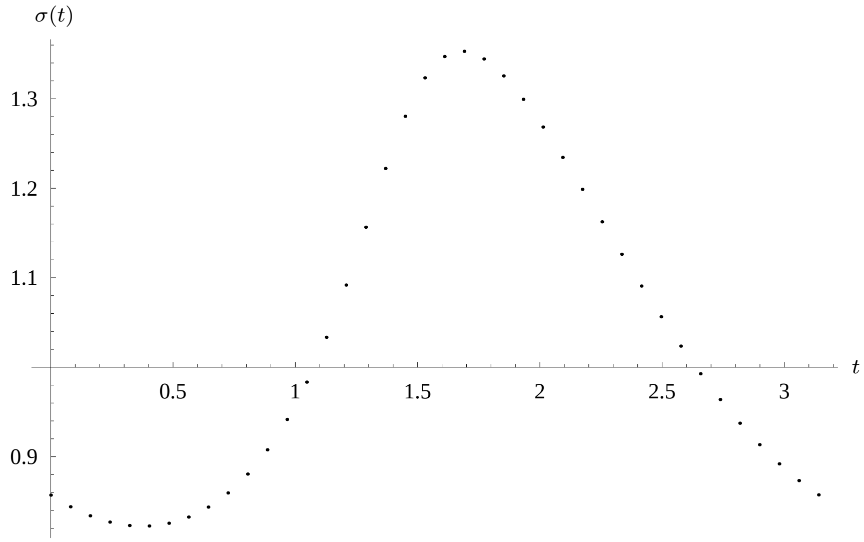

Рис. 5. График $\sigma(t)$ для (33) при $g = 9.81$, $\ell = 1$, $a_0(t) = 5\sin 2t$

удовлетворяет неравенству $\sigma(t) \geqslant r$, кроме того возмущение $w(t, x_1)$ — непрерывная функция и $w(t, 0) = 0$. Таким образом, в малой окрестности нуля для системы (33) применима теорема 4.

На рис. 5 построен график $\sigma(t)$ для системы (33) при $g = 9.81$, $\ell = 1$, $a_0(t) = 5\sin 2t$. В этом примере $\sigma(t) \geqslant r = 0.823$. Множество управляемости $\mathfrak{D}$ системы (33) при указанных параметрах построено на рис. 6.

На рис. 7 построены: а) поверхность переключения $\mathcal{N}_+^2 \bigcup \mathcal{N}_-^2$ системы (33) для $g = 9.81$, $\ell = 1$, $a_0(t) = 5\sin 2t$ и б) два решения, выходящие из точки $x_0 = (0, 0.4)$ при $t_0 = 1.5$. Решение, изображенное толстой линией, отвечает системе (33) при $g = 9.81$, $\ell = 1$, $a_0(t) = 5\sin 2t$, $u = \widehat{u}(t, x)$ (оно имеет одно переключение, но в силу численного алгоритма, приближенное решение пересекает поверхность переключения многократно). Решение, изображенное тонкой линией, отвечает системе (32) при тех же значениях g, ℓ, $a_0(t)$ и при $a_1(t) = 5\sin 3t$.

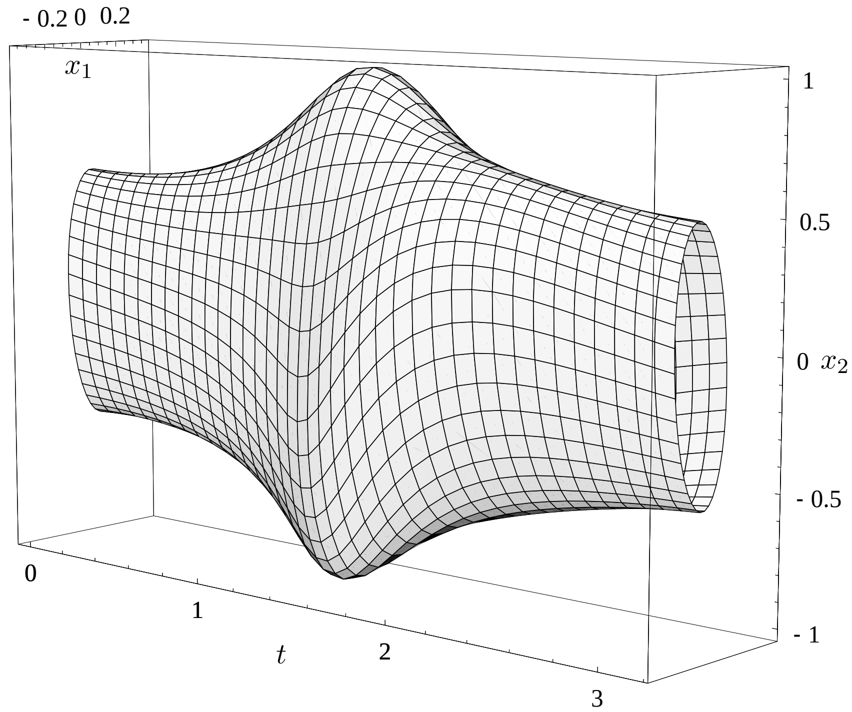

Рис. 6. Множество $\mathfrak{D}$ при $g = 9.81$, $\ell = 1$, $a_0(t) = 5\sin 2t$

Список литературы

1. Brunovski P. Regular synthesis and singular extremas // Lect. Contr. and Inform. Sci. 1980, V.22, P.280–284.

2. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985, С. 223.

3. Красовский Н. Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985, С. 518.

4. Субботина Н. Н. Универсальные оптимальные стратегии в

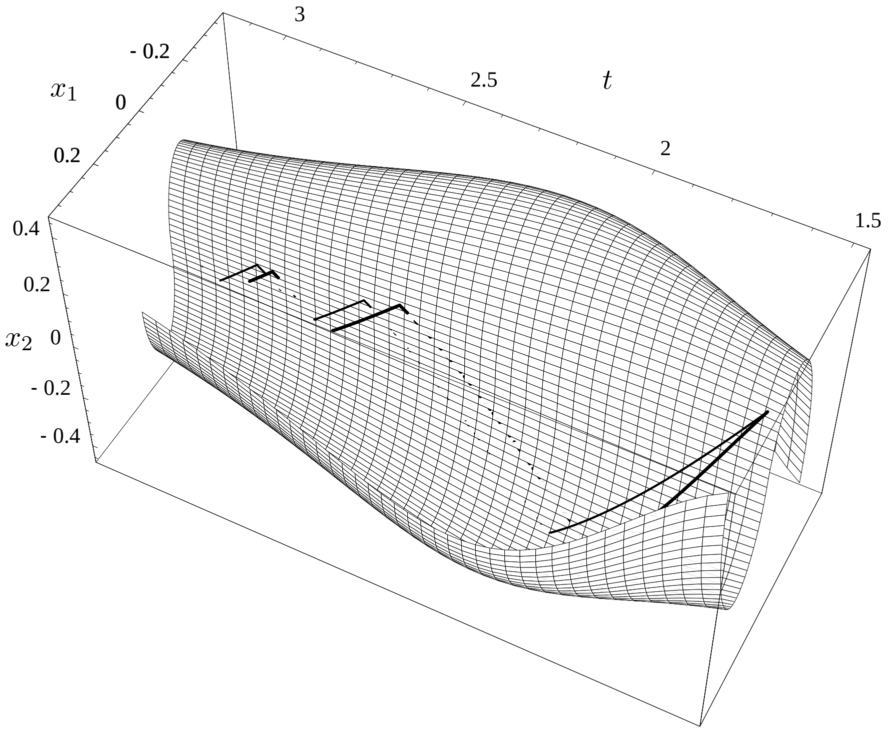

Рис. 7. Поверхность $\mathcal{N}_+^2 \bigcup \mathcal{N}_-^2$ и решения систем (32) и (33)

позиционных дифференциальных играх // Дифференц. уравнения, 1983. Т. 19. №. 11. С. 1890–1896.

5. Палис Ж., ди Мелу В. Геометрическая теория динамических систем.М.: 1986, С. 301.

6. Николаев С. Ф., Тонков Е. Л. Дифференцируемость функции быстродействия и позиционное управление линейной нестационарной системой // Изв. Ин-та матем. и информ. УдГУ. Ижевск, 1996. № 2 (8). С. 47–68.

7. Nickolayev S. F., Tonkov E. L. Differentiability of Speed Function and Positional Control of Linear Nonstationary System //

Nonsmooth and discontin. probl. of contr. and optimiz (NDPCO 98). June 1998: Proceedings of the Internat. Workshop, Chelyabinsk, 1998. P. 163–165.

8. Николаев С. Ф. Численная оценка интервала докритичности // Изв. Ин-та матем. и информ. УдГУ. Ижевск, 1998. № 1(12). С.81–88.

9. Субботин А. И. Минимаксные решения уравнений с частными производными первого порядка // Успехи матем. наук, 1996. Т. 51. Вып. 2(308). С. 105–138.

10. Aubin J.-P. Mutational and Morphological Analysis. Tools for Shape Regulation and Optimization. 1998. 352 p.

11. Антонов И.Л. Случайные колебания. Свойства траекторий. М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 1993, С. 176.