2000. Т. 36, №1. С. 76 — 84

УДК 517.977

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ВЕКТОРА БЫСТРОДЕЙСТВИЯ И ПОЗИЦИОННОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ ДОКРИТИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ

С. Ф. Николаев, Е. Л. Тонков

Введение. В работе, продолжающей исследования [1], [2], изучаются условия дифференцируемости функции быстродействия $\tau_n(t,x)$ линейной докритической (см. [2]) системы

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u, \quad |u| \leqslant 1, \tag{1}$$

(с одним входом и n выходами, $n \geqslant 2$) и возможность построения позиционного управления, оптимального в смысле быстродействия. В отличие от [1], здесь даны доказательства всех утверждений и устранен пробел в доказательстве теоремы 5 работы [1].

Следует отметить,что, независимо от гладкости A и b, в любой окрестности нуля пространства (t,x)-переменных существуют (отличные от нуля) точки, в которых функция быстродействия теряет гладкость, но таких точек «достаточно мало». Более точно, будет показано, что в предположении докритичности, в расширенном фазовом пространстве (пространстве (t,x)-переменных) существует слабо инвариантное гладкое многообразие $\mathcal{N}^n$ размерности n, содержащее нуль и обладающее тем свойством, что в каждой точке $(t,x) \in \mathcal{N}^n$ функция быстродействия не имеет производной. Далее, во всех точках (t,x) множества $D \doteq \{(t,x) : t \in \mathbb{R}, \tau_n(t,x) < \sigma(t)\}$ ($\sigma(t)$ определяет интервал докритичности), не лежащих на многообразии $\mathcal{N}^n$, функция быстродействия имеет гладкость на единицу больше гладкости функции $t \to (A(t), b(t))$, задающей систему (1).

Оказывается, что аналогичным образом функция быстродействия ведет себя на многообразии $\mathcal{N}^n$: во всех точках многообразия $\mathcal{N}^n$, за исключением точек, находящихся на некотором (слабо инвариантном) подмногообразии $\mathcal{N}^{n-1}$ размерности $n-1$, функция $\tau_n(t,x)$ непрерывно дифференцируема при $(t,x) \in D$ в направлении любого вектора, лежащего в пространстве, касательном к $\mathcal{N}^n$ в точке (t,x). Такая структура вложенных слабо инвариантных многообразий, уменьшающих размерность пространства непрерывной дифференцируемости по направлениям, естественным образом продолжается до многообразия размерности единица (факторизация Полиа и Маммана).

Многообразия $\mathcal{N}^k$, $k = 1, \ldots, n$, обладают тем свойством, что на них оптимальное в смысле быстродействия управление разрывно (управление переключается с $+1$ на -1 или с -1 на $+1$), а конус допустимых векторов скоростей (направляющий оптимальное движение, если понимать такое движение в смысле определения А. Ф. Филиппова) касается одного из многообразий $\mathcal{N}^k$ (конус находится по одну сторону от касательного пространства и имеет с этим пространством общий вектор). Это обстоятельство позволяет корректно определить позиционное управление, оптимальное в смысле быстродействия. При этом позиционное управление достаточно задать только на многообразии $\mathcal{N}^{1+n}$ максимальной размерности, так как движения $(t, x(t))$ (в смысле Филиппова) системы с разрывной по фазовым координатам правой частью не зависят от того, как определена правая часть на множествах, мера Лебега которых (в $\mathbb{R}^{1+n}$) равна нулю. Таким образом, наличие докритичности (факторизации Полиа-Маммана) влечет существование позиционного управления, оптимального в смысле быстродействия.

1. Обозначения и определения. Здесь сохранены обозначения работы [2]; напомним некоторые из них: $\mathbb{R}^n$ — евклидово пространство размерности n с нормой $|x| = \sqrt{x^* x}$ (звезда означает операцию транспонирования). Если не оговорено другое, векторы-столбцы обозначаются латинскими буквами, векторы-строки — греческими (таким образом, запись ξx означает скалярное произведение векторов ξ и x); $\operatorname{End}(\mathbb{R}^n)$ — пространство линейных отображений в $\mathbb{R}^n$ с нормой $|A| = \max\{|Ax| : |x| \leqslant 1\}$.

Пусть D — произвольное множество в $\mathbb{R}^n$. Обозначим $\operatorname{int} D$ — внутренность множества D относительно $\mathbb{R}^n$, $\operatorname{cl} D$ — замыкание D в $\mathbb{R}^n$. *Опорной функцией* $\xi \to \mathrm{c}(\xi, D)$ множества D называется функция, определенная равенством $\mathrm{c}(\xi, D) = \sup\{\xi x : x \in D\}$. Свойства опорной функции см. [3].

Напомним [4], что если M и N — многообразия класса C^r, $r \geqslant 1$, вложенные в конечномерные пространства и f — отображение из M в N, то f принадлежит классу C^k, $k \leqslant r$ в точке $p \in M$, если для любой k раз непрерывно дифференцируемой кривой $p : (-1, 1) \to M$, проходящей через точку p, $p(0) = p$, функция $\varepsilon \to f(p(\varepsilon))$ из $(-1, 1)$ в N принадлежит классу C^k в точке $\varepsilon = 0$. Далее, отображение $df(p) : T_pM \to T_qN$, действующее из пространства T_pM, касательного к M в точке p в пространство T_qN, касательное к N в точке $q = f(p)$ и определенное равенством $df(p)v = df(p(\varepsilon))/d\varepsilon|_{\varepsilon=0}$ для всякой C^k-кривой $p : (-1, 1) \to M$ ($p(0) = p$, $dp(\varepsilon)/d\varepsilon|_{\varepsilon=0} = v \in T_pM$), называется производной отображения f в точке p. Отображение $f : M \to N$ называется *C^k-диффеоморфизмом*, если оно принадлежит классу C^k и имеет обратное того же класса. *Если $f : M \to N$ отображение класса C^k и $df(p)$ — изоморфизм для каждого $p \in M$, то f — диффеоморфизм класса C^k.*

Всюду далее предполагается, что функции $A : \mathbb{R} \to \operatorname{End}(\mathbb{R}^n)$ и $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, задающие систему (1), принадлежат классу C^k при некотором $k \geqslant 0$. *Функцией быстродействия* $(t, x) \to \tau_n(t, x)$ системы (1) называется функция, значение которой в каждой точке (t_0, x_0) определено равенством $\tau_n(t_0, x_0) = \min\limits_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} \{\vartheta \geqslant 0 : x(t_0 + \vartheta, t_0, x_0, u(\cdot)) = 0\}$, где $\mathcal{U}$ — совокупность всех измеримых функций со значениями в $[-1, 1]$, $x(t, t_0, x_0, u(\cdot))$ — решение системы (1) при управлении $u = u(t)$ и начальном условии $x(t_0) = x_0$. Если для некоторой точки (t_0, x_0) не существует допустимого управления, переводящего решение в нуль за конечное время, будем полагать, что $\tau_n(t_0, x_0) = \infty$.

Множеством управляемости системы (1) *на отрезке* $[t_0, t_0 + \vartheta]$ называется множество $D_\vartheta(t_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \tau_n(t_0, x) \leqslant \vartheta\}$. Для $D_\vartheta(t_0)$ имеет место равенство

$$D_\vartheta(t_0) = -\int\limits_{t_0}^{t_0+\vartheta} X(t_0, t) b(t) U dt, \quad U = [-1, 1],$$

где $X(t, s)$ — матрица Коши системы $\dot{x} = A(t)x$, интеграл в смысле А. А. Ляпунова [5, с. 229].

Система (1) называется *дифференциально управляемой в точке* t_0, если для всех $\vartheta > 0$ имеет место включение $0 \in \operatorname{int} D_\vartheta(t_0)$, и *дифференциально управляемой на интервале* $J \subset \mathbb{R}$, если она дифференциально управляема в каждой точке этого интервала. В [6, лемма 1 и теорема 2] показано, что если система (1) дифференциально управляема на J, то для любого $t_0 \in J$ *множество управляемости* $D(t_0) \doteq \bigcup\limits_{\vartheta \geqslant 0} D_\vartheta(t_0)$ открыто в $\mathbb{R}^n$, и функция быстродействия непрерывна в каждой точке $(t_0, x_0) \in J \times D(t_0)$.

Множество $\mathfrak{N}$ в расширенном фазовом пространстве $\mathbb{R}^{1+n}$ системы (1) называется *слабо инвариантным*, если для любой точки $(t_0, x_0) \in \mathfrak{N}$ существует управление $u_0(\cdot) \in \mathcal{U}$ такое, что решение $x_0(t)$ системы (1) при $u = u_0(t)$ и начальном условии $x_0(t_0) = x_0$, удовлетворяет включению $(t, x_0(t)) \in \mathfrak{N}$ для всех $t \geqslant t_0$. В частности, *расширенное множество управляемости* $\mathfrak{D} \doteq \mathbb{R} \times D_{\sigma(t)}(t)$ слабо инвариантно (для любой функции $\sigma(t)$, удовлетворяющей неравенству $\sigma(t) > 0$ при всех $t \in \mathbb{R}$).

2. Вектор быстродействия. Пусть $\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)$ — произвольный базис решений сопряженной системы $\dot{\psi} = -\psi A(t)$, $\sigma(t_0)$ — точная верхняя грань таких $\sigma > 0$, что на полуинтервале $[t_0, t_0 + \sigma)$ совокупность функций $\xi_i(t) \doteq \psi_i(t) b(t)$, $i = 1, \ldots, n$, является T-системой (всякая нетривиальная линейная комбинация имеет на $[t_0, t_0+\sigma)$ не более $n-1$ геометрически различных нулей). Если совокупность $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ является T-системой на $[t_0, t_0+\vartheta)$, то для любых точек $t_1, \dots, t_{n-1}$ ($t_0 \leqslant t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_0+\vartheta$), найдется линейная комбинация функций, имеющая простые нули в точках t_i и не имеющая нулей на $[t_0, t_0+\vartheta)$ [7, с. 53].

Определение 1 (см. [2]). Система (1) называется докритической на интервале J, если для всех $t \in J$ выполнено неравенство $\sigma(t) > 0$.

Лемма 1 (см. [2]). *Если система* (1) *докритическая на* J, *то она дифференциально управляема для всех* $t \in J$.

Введем обозначение $\tau_n = \vartheta$ и для каждого $k = 0, 1, \dots, n$ и любого $t \in \mathbb{R}$ определим многообразия $\mathcal{M}^k(t) \doteq \{\tau = (\tau_{n-k+1}, \dots, \tau_n) : 0 < \tau_{n-k+1} < \dots < \tau_n < \sigma(t)\}$, $k = 1, \dots, n$, $\mathcal{M}^0(t) \doteq \{0\}$, и многообразия $\mathcal{M}^{1+k} = \mathbb{R} \times \mathcal{M}^k(t)$. Всякой точке $p = (t, \tau) \in \mathcal{M}^{1+k}$ поставим в соответствие точку $q = (t, x)$, где $x = 0$ при $k = 0$ и

$$x = x(p) = -\sum_{i=n-k}^{n-1} (-1)^{i-n+k} \int\limits_{t+\tau_i}^{t+\tau_{i+1}} X(t,s) b(s)\, ds, \quad \tau_{n-k} = 0, \quad k \geqslant 1. \tag{2}$$

Таким образом, для каждого k задана функция $p \to F(p) = q$ с областью определения $\mathcal{M}^{1+k}$ и областью значений $\mathcal{N}_+^{1+k} \doteq F(\mathcal{M}^{1+k})$ (в дальнейшем нижний индекс у $\mathcal{N}_+^1$ опускаем). Так как $\mathcal{N}_+^{1+k} = \mathbb{R} \times \mathcal{N}_+^k(t)$, где $\mathcal{N}^0(t) = \{0\}$, а для $k \geqslant 1$ множество $\mathcal{N}_+^k(t)$ состоит из точек вида (2), то $\mathcal{N}_+^k(t) \subset D_{\sigma(t)}(t)$. Поэтому, в силу принципа максимума Понтрягина и условия $\tau_n < \sigma(t)$, каждой точке $q = (t, x) \in \mathcal{N}_+^{1+k}$ отвечает единственная точка $p = (t, \tau) \in \mathcal{M}^{1+k}$, задающая (при $k \geqslant 2$) моменты переключений управления, переводящего позицию (t, x) в позицию $(t+\tau_n, 0)$ и оптимального в смысле быстродействия (при $k = 0$ оптимальное управление $\equiv 0$, а при $k = 1$ не имеет переключений). Далее, для F имеет место равенство $F(p+\delta p) = F(p) + dF(p)\delta p + \omega(|\delta p|)$, где $dF(p) = \mathrm{col}(1, 0, \dots, 0)$ при $k = 0$,

$$dF(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ w_{n-k}(p) & w_{n-k+1}(p) & \dots & w_n(p) \end{pmatrix}, \quad k \geqslant 1. \tag{3}$$

Здесь обозначено: $w_{n-k}(p) = \partial x(p)/\partial t = A(t)x(p) + b(t) + w_{n-k+1}(p) + \dots + w_n(p)$, $w_i(p) = \partial x(p)/\partial \tau_i = 2(-1)^{i-n+k} X(t, t+\tau_i) b(t+\tau_i)$, если $i = n-k+1, \dots, n-1$, $w_n(p) = \partial x(p)/\partial \tau_n = (-1)^k X(t, t+\tau_n) b(t, t+\tau_n)$. В [2] показано, что при каждом фиксированном $p \in \mathcal{M}^{1+k}$ векторы $w_{n-k+1}(p), \dots, w_n(p)$ линейно независимы, поэтому столбцы матрицы $dF(p)$ тоже линейно независимы. Следовательно $dF(p)$ — изоморфизм пространства $T_p\mathcal{M}^{1+k}$, касательного к многообразию $\mathcal{M}^{1+k}$ в точке p, в пространство $T_q\mathcal{N}_+^{1+k}$, касательное к многообразию $\mathcal{N}_+^{1+k}$ в точке $q = F(p)$. Кроме того, функция $p \to dF(p)$ принадлежит классу C^r и поэтому F — диффеоморфизм класса C^{r+1}. Следовательно, для каждого $k = 0, 1, \dots, n$, многообразие $\mathcal{N}_+^{1+k}$ является гладким многообразием класса C^{r+1}.

Построенные многообразия $\mathcal{N}_+^{1+k}$ обладают тем свойством, что для точек $(t_0, x_0) \in \mathcal{N}_+^{1+k}$ оптимальное (в смысле быстродействия) управление $u_0(t)$ при $t \in [t_0, t_0 + \tau_{n-k+1}(t_0, x_0))$ равно $+1$. Аналогичным образом строятся многообразия $\mathcal{N}_-^{1+k}$, $k = 1, \dots, n$ (в этом случае оптимальное управление начинается с -1).

Теорема 1 ([1], [2]). *Предположим, что система* (1) *докритическая. Тогда расширенное множество управляемости* $\mathfrak{D} \doteq \mathbb{R} \times D_{\sigma(t)}(t)$ *представимо в виде* $\mathfrak{D} = \mathrm{cl}\left(\mathfrak{N}_+^{1+n} \bigcup \mathfrak{N}_-^{1+n}\right)$, *где* $\mathfrak{N}_+^{1+k} = \mathcal{N}_+^{1+k} \bigcup \mathcal{N}_-^k \bigcup \mathcal{N}_+^{k-1} \bigcup \dots \bigcup \mathcal{N}^1$, $\mathfrak{N}_-^{1+k} = \mathcal{N}_-^{1+k} \bigcup \mathcal{N}_+^k \bigcup \mathcal{N}_-^{k-1} \bigcup \dots \bigcup \mathcal{N}^1$, $k = 0, \dots, n$. *Оказывается далее, что для каждого* $k = 0, \dots, n$, *многообразия* $\mathfrak{N}_+^{1+k}$, $\mathfrak{N}_-^{1+k}$ *слабо инвариантны и многообразие* $\mathfrak{N}_+^k \bigcup \mathfrak{N}_-^k$ *является общим краем многообразий* $\mathrm{cl}\,\mathfrak{N}_+^{1+k}$ *и* $\mathrm{cl}\,\mathfrak{N}_-^{1+k}$.

Пусть $q_0 = (t_0, x_0) \in \mathcal{N}_+^{1+n}$, тогда функция $F^{-1} : \mathcal{N}_+^{1+n} \to \mathcal{M}^{1+n}$, обратная к F при $k = n$ задает точку $p_0 = (t_0, \tau_1(q_0), \dots, \tau_n(q_0)) \in \mathcal{M}^{1+n}$, $0 < \tau_1(q_0) < \dots < \tau_n(q_0)$. Оказывается (это будет доказано ниже), что для каждого $i = 1, \dots, n$, число $\tau_i(q_0)$ является временем быстродействия ($\vartheta = \tau_i(q_0)$) в задаче о переводе $x_0 \in \mathcal{N}_+^n(t_0)$ на многообразие $\mathcal{N}_{\nu(i)}^{n-i}(t_0+\vartheta)$:

$$\vartheta(u(\cdot)) \to \min_{u(\cdot)}, \quad u(\cdot) \in \mathcal{U}, \tag{4}$$

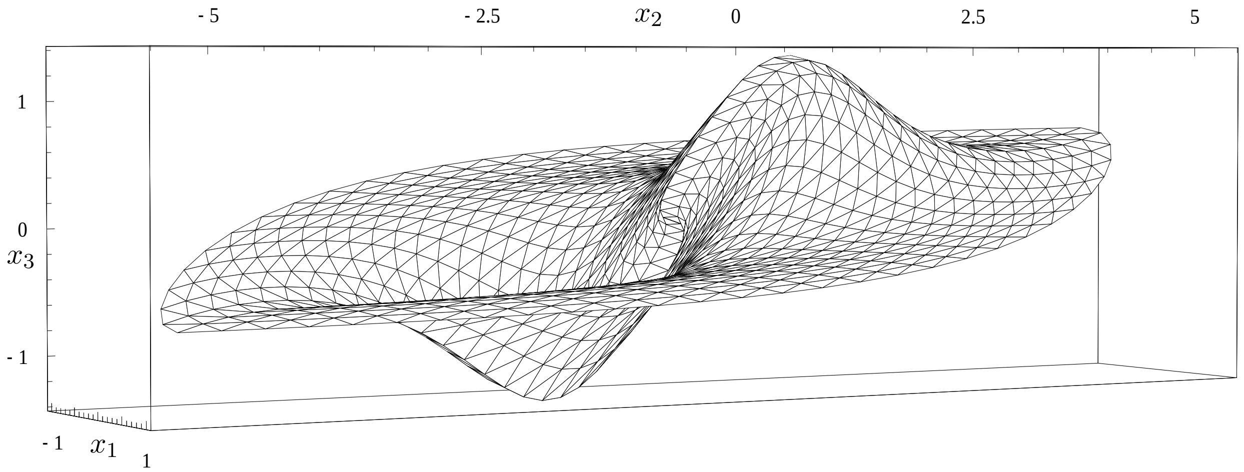
$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \vartheta, \tag{5}$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_0 + \vartheta) \in \mathcal{N}^{n-i}_{\nu(i)}(t_0 + \vartheta), \tag{6}$$

где вместо $\nu(i)$ надо поставить знак «плюс», если i — четное и знак «минус», если i — нечетное число. Вектор $\tau(q) = (\tau_1(q), \ldots, \tau_n(q))$ будем называть *вектором быстродействия.*

Замечание 1. Вектор быстродействия определен на $\mathcal{N}^{1+n}_+$. Поскольку множество $D_{\sigma(t)}(t)$ центрально симметрично, то фактически вектор $\tau(q)$ определен на $\mathcal{N}^{1+n}_+ \bigcup \mathcal{N}^{1+n}_-$ (действительно, из включения $x \in \mathcal{N}^n_+(t)$ следует включение $-x \in \mathcal{N}^n_-(t)$, причем $\tau_i(t,x) = \tau_i(t,-x)$). С учетом (6) доопределим $\tau(q)$ на все $\mathfrak{D}$, положив $\tau_i(q) = 0$ при $q \in \mathfrak{N}^{1+n-i}_+ \bigcup \mathfrak{N}^{1+n-i}_-$ (для $i \in \{1, \ldots, n\}$, мера Лебега множества $\mathfrak{N}^{1+n-i}_+ \bigcup \mathfrak{N}^{1+n-i}_-$ равна нулю).

Пример 1. На рисунке построено множество $\mathcal{N}^2_+(t_0) \bigcup \mathcal{N}^2_-(t_0)$ (сечение поверхности переключения $\mathcal{N}^3_+ \bigcup \mathcal{N}^3_-$ оптимального управления при фиксированном t_0) для системы [2, пример 1] $\dot{x}_1 = a_1(t)x_1 + a_2(t)x_3 + u$, $\dot{x}_2 = x_1$, $\dot{x}_3 = x_1 + a_3(t)x_3$, при $|u| \leqslant 1$, $t_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0.1 \sin t$, $a_3 = 1 + 0.999 \sin t$ для точек $x \in D_\vartheta(t_0)$, где $\vartheta = 2\pi$.



Теорема 2. *Пусть система* (1) *докритическая. Обозначим* $(u^0(\cdot), \vartheta^0, x^0(\cdot))$ — *оптимальный процесс задачи* (4) — (6) *при некотором фиксированном* $i \in \{1, \ldots, n\}$. *Тогда* $\vartheta^0 = \tau_i(q_0)$ *и на интервале* $(t_0, t_0 + \tau_i(q_0))$ *оптимальное управление* $u^0(t)$ *и отвечающее ему оптимальное решение* $x^0(t)$ *системы* (5) *совпадают с оптимальными управлением и решением задачи быстродействия в нуль* (*т. е. задачи* (4) — (6) *при* $i = n$).

Доказательство. Пусть $q_0 \in \mathcal{N}^{1+n}_+$ и $(u(t), \vartheta, x(t))$ — допустимый процесс задачи (5), (6) при $i = 1$. Докажем, что $\vartheta \geqslant \tau_1(q_0)$. Доказательство разобъём на несколько пунктов.

А. Пусть $p_0 = F^{-1}(q_0)$, где F^{-1} — отображение, обратное к F (см. (2) при $k = n$). Тогда

$$x_0 = -\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \int\limits_{t_0+\tau_i}^{t_0+\tau_{i+1}} X(t_0, t) b(t) dt, \tag{7}$$

где $\tau_0 = 0$, $\tau_i = \tau_i(q_0)$. Далее, поскольку $x(t_0 + \vartheta) \in \mathcal{N}^{n-1}_-(t_0 + \vartheta)$, то найдется вектор $\theta = (\theta_2, \ldots, \theta_n)$, $0 < \theta_2 < \cdots < \theta_n$, что

$$x(t_0 + \vartheta) = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} \int\limits_{t_0+\vartheta+\theta_i}^{t_0+\vartheta+\theta_{i+1}} X(t_0 + \vartheta, t) b(t) dt. \tag{8}$$

Здесь $\theta_1 = 0$, $\theta_i = \tau_i(t_0 + \vartheta, x(t_0 + \vartheta))$, $i = 2, \ldots, n$. Подставив (7) и (8) в решение $x(t) = X(t, t_0)x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} X(t,s)b(s)u(s)ds$, после несложных преобразование получим n равенств

$$2 \sum_{i=2}^{n-1} (-1)^i \int\limits_{t_0+\vartheta+\theta_i}^{t_0+\tau_i} X(t_0, t) b(t)\, dt - (-1)^n \int\limits_{t_0+\tau_n}^{t_0+\vartheta+\theta_n} X(t_0, t) b(t)\, dt +$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t_0+\vartheta} X(t_0,t)b(t)(u(t)-1)\,dt-2\int\limits_{t_0+\vartheta}^{t_0+\tau_1} X(t_0,t)b(t)\,dt=0. \tag{9}$$

Таким образом, каждому допустимому процессу задачи (5), (6) отвечает решение $w=(u(\cdot),\vartheta,\theta)$ системы уравнений (9); верно и обратное утверждение, поэтому решение w системы (9) тоже будем называть допустимым процессом задачи (5), (6). Очевидным допустимым процессом служит тройка $w^0=(u^0(\cdot),\tau_1,\theta^0)$, где $u^0(t)=1$ при $t\in[t_0,t_0+\tau_1)$, $\theta^0=(\tau_2-\tau_1,\ldots,\tau_n-\tau_1)$.

Пусть $\psi\in S^{n-1}$. Умножим равенства (9) скалярно на ψ и получившуюся слева функцию обозначим $\mathfrak{S}(w,\psi)$. Тогда $\mathfrak{S}=I_1(w,\psi)+S(w,\psi)+I_n(w,\psi)$, где $I_1=\int\limits_{t_0}^{t_0+\vartheta}\xi(t)(u(t)-1)dt-2\int\limits_{t_0+\vartheta}^{t_0+\tau_{nt-1}}\xi(t)\,dt$, $S=2\sum\limits_{i=2}^{n-1}(-1)^i\int\limits_{t_0+\vartheta+\theta_i}^{t_0+\tau_i}\xi(t)\,dt$, $I_n=-(-1)^n\int\limits_{t_0+\tau_n}^{t_0+\vartheta+\theta_n}\xi(t)\,dt$, $\xi(t)=\psi X(t_0,t)b(t)$. Таким образом, для любого допустимого процесса w и любого $\psi\in S^{n-1}$ из (9) следует равенство $\mathfrak{S}(w,\psi)=0$.

Б. Запишем сумму $S(w,\psi)$ в виде $S=I_2(w,\psi)+\cdots+I_{n-1}(w,\psi)$, где $I_i=c_i\int\limits_{t_0+\alpha_i}^{t_0+\beta_i}\xi(t,\psi)\,dt$, $i=2,\ldots,n-1$, $\alpha_i=\min\{\vartheta+\theta_i,\tau_i\}$, $\beta_i=\max\{\vartheta+\theta_i,\tau_i\}$, $c_i=2(-1)^i$, если $\alpha_i=\vartheta+\theta_i$ и $c_i=-2(-1)^i$, если $\alpha_i=\tau_i$. Очевидно $\alpha_i\leqslant\beta_i$. Оказывается далее, что $\alpha_i\leqslant\alpha_{i+1}$. Действительно, если $\alpha_i=\vartheta+\theta_i$ и $\alpha_{i+1}=\vartheta+\theta_{i+1}$ или $\alpha_i=\tau_i$ и $\alpha_{i+1}=\tau_{i+1}$, то неравенство $\alpha_i\leqslant\alpha_{i+1}$ очевидно. Пусть $\alpha_i=\vartheta+\theta_i$, $\alpha_{i+1}=\tau_{i+1}$; тогда $\beta_i=\tau_i$ и $\alpha_i\leqslant\beta_i<\tau_{i+1}=\alpha_{i+1}$. Если же $\alpha_i=\tau_i$, $\alpha_{i+1}=\vartheta+\theta_{i+1}$, то $\alpha_i\leqslant\beta_i=\vartheta+\theta_i<\vartheta+\theta_{i+1}=\alpha_{i+1}$. Аналогично доказываются неравенства $\beta_i\leqslant\beta_{i+1}$.

Покажем, что если при некотором i интервалы (α_i,β_i) и $(\alpha_{i+1},\beta_{i+1})$ пересекаются, то $c_i+c_{i+1}=0$. Действительно, пусть $\alpha_{i+1}<\beta_i$ и $\alpha_{i+1}=\vartheta+\theta_{i+1}$, тогда $\beta_i=\tau_i$ и поэтому $\alpha_i=\vartheta+\theta_i$; следовательно $c_i+c_{i+1}=2(-1)^i+2(-1)^{i+1}=0$. Если $\alpha_{i+1}=\tau_{i+1}$, то $\beta_i=\vartheta+\theta_i$. Поэтому $\alpha_i=\tau_i$ и $c_i+c_{i+1}=-2(-1)^i-2(-1)^{i+1}=0$. Таким образом, любой паре пересекающихся интервалов (α_i,β_i) и $(\alpha_{i+1},\beta_{i+1})$ отвечает в $S(w,\psi)$ два интеграла $I_i^0(w,\psi)=c_i\int\limits_{t_0+\alpha_i}^{t_0+\alpha_{i+1}}\xi(t,\psi)\,dt$ и $I_{i+1}^0(w,\psi)=c_{i+1}\int\limits_{t_0+\beta_i}^{t_0+\beta_{i+1}}\xi(t,\psi)\,dt$ с непересекающимися интервалами $(t_0+\alpha_i,t_0+\alpha_{i+1})$ и $(t_0+\beta_i,t_0+\beta_{i+1})$ (для дальнейшего важно, что отмеченная перестройка не увеличивает количество интегралов в $S(w,\psi)$).

В. Предположим, что существует допустимый процесс $(u(\cdot),\vartheta,\theta)$, такой, что $\vartheta\leqslant\tau_1$. Выберем вектор $\psi_0\in S^{n-1}$, обеспечивающий следующие свойства функции $\xi_0(t)=\xi(t,\psi_0)$: 1) $\xi_0(t)>0$ при $t\in(t_0,t_0+\tau_1)$; 2) $(-1)^n\xi_0(t)>0$ при $t\in(t_0+\tau_n,t_0+\vartheta+\theta_n)$ (неравенство $\tau_n\leqslant\vartheta+\theta_n$ следует из определения функции быстродействия); 3) если интервал $(t_0+\alpha_i,t_0+\beta_i)$ не пересекается с остальными интервалами, находящимися в $(t_0+\alpha_2,t_0+\beta_{n-1})$, то $c_i\xi_0(t)<0$ при $t\in(t_0+\alpha_i,t_0+\beta_i)$; 4) если интервалы $(t_0+\alpha_i,t_0+\beta_i)$ и $(t_0+\alpha_{i+1},t_0+\beta_{i+1})$ пересекаются, то $c_i\xi_0(t)<0$ при $t\in(t_0+\alpha_i,t_0+\alpha_{i+1})$ и $c_{i+1}\xi_0(t)<0$ при $t\in(t_0+\beta_i,t_0+\beta_{i+1})$. В силу докритичности, функция $\xi_0(t)$ с указанными свойствами существует. Действительно, максимальное число нулей $\xi_0(t)$ на интервале $(t_0+\alpha_2,t_0+\beta_{n-1})$ не превосходит количества интегралов в $S(w,\psi)$ (а их $n-2$) минус единица (т. е. $n-3$), кроме того, два нуля может появиться в точках $t_0+\tau_1$ и $t_0+\tau_n$ (напомним, что на интервалах $(t_0,t_0+\tau_1)$ и $(t_0+\tau_n,t_0+\vartheta+\theta_n)$ функция $\xi_0(t)$ сохраняет знак). Следовательно, $\xi_0(t)$ имеет не более $n-1$ нулей, что допустимо.

Из построения $\xi_0(t)$ получаем неравенства $I_1(w,\psi_0)\leqslant0$, $S(w,\psi_0)\leqslant0$, $I_n(w,\psi_0)\leqslant0$. Так как $\mathfrak{S}(w,\psi_0)=0$, то $I_1(w,\psi_0)=S(w,\psi_0)=I_n(w,\psi_0)=0$. Далее, из равенства $I_1(w,\psi_0)=0$ следуют равенства $\vartheta=\tau_1$ и $u(t)=1$ при $t\in(t_0,t_0+\tau_1)$.

Теорема 2 доказана для $k=n$. Доказательство для $i=2,\ldots,n-1$ аналогично.

З а м е ч а н и е 2. Пусть $q_0=(t_0,x_0)\in\mathcal{N}_+^{1+n}\bigcup\mathcal{N}_-^{1+n}$, $x_0(t)$, $t_0\leqslant t\leqslant t_0+\tau_n(q_0)$ — оптимальное решение задачи быстродействия, отвечающее начальной точке q_0, $\tau(q_0)=(\tau_1(q_0),\ldots,\tau_n(q_0))$

— вектор быстродействия. Тогда для каждого $k \in \{1, \ldots, n\}$ и любого $i \in \{k, \ldots, n\}$ имеют место равенства $\tau_i(t_0 + \tau_k(q_0), x_0(t_0 + \tau_k(q_0))) = \tau_i(q_0) - \tau_k(q_0)$.

3. Дифференцируемость вектора быстродействия. Пусть $\tau(q) = (\tau_1(q), \ldots, \tau_n(q))$ — вектор быстродействия системы (1). Напомним, что производной функции $\tau_i : \mathcal{N}_+^{1+k} \to \mathbb{R}$ в точке q_0 вдоль направления, заданного вектором $w \in T_{q_0}\mathcal{N}_+^{1+k}$, называется линейное отображение $d\tau_i(q_0) : T_{q_0}\mathcal{N}_+^{1+k} \to \mathbb{R}$, определенное равенством $d\tau_i(q_0)w \doteq d\tau_i(q(\varepsilon))/d\varepsilon\mid_{\varepsilon=0}$, где $q(\varepsilon)$ — класс эквивалентности гладких кривых $q : (-1, 1) \to \mathcal{N}_+^{1+k}$, обладающих следующими свойствами: $q(0) = q_0$, $dq(\varepsilon)/d\varepsilon|_{\varepsilon=0} = w$. Аналогично определяется производная $d^s\tau_i$, $s \geqslant 2$:

$$d^s\tau_i(q_0)\,(w_1, \ldots, w_s) \doteq d^s\tau_i(q(\varepsilon))/d\varepsilon^s\mid_{\varepsilon=0}, \tag{10}$$

где $q : (-1, 1) \to \mathcal{N}_+^{1+k}$ — класс эквивалентности гладких кривых вида $q(\varepsilon) = q_0 + \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2/2! + \cdots + \varepsilon^s w_s/s! + o(\varepsilon^s)$. Функция $q \to \tau_i(q)$ принадлежит классу C^s на многообразии $\mathcal{N}_+^{1+k}\bigcup\mathcal{N}_-^{1+k}$, если для всякой C^s-кривой $q : (-1, 1) \to \mathcal{N}_+^{1+k}\bigcup\mathcal{N}_-^{1+k}$ функция $\varepsilon \to \tau_i(q(\varepsilon))$ из класса C^s. Отметим еще, что пространство C^s-функций $q : (-1, 1) \to \mathcal{N}_+^{1+k}$, проходящих через точку $q_0 = q(0)$, исчерпывается следующим набором: $q(\varepsilon) = (t(\varepsilon), x(p(\varepsilon))$, где $p(\varepsilon) = (t(\varepsilon), \tau(\varepsilon)) \in \mathcal{M}^{1+k}$ — произвольная C^s-функция, проходящая через точку $p_0 = F^{-1}(q_0)$,

$$x(p(\varepsilon)) = -\sum_{i=n-k}^{n-1}(-1)^{i-n+k}\int\limits_{t(\varepsilon)+\tau_i(\varepsilon)}^{t(\varepsilon)+\tau_{i+1}(\varepsilon)} X(t(\varepsilon), s)b(s)\,ds, \quad \tau_{n-k} = 0.$$

Теорема 3. *Пусть система* (1) *докритическая и функции* $A : \mathbb{R} \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$, $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, *принадлежат классу* C^r. *Тогда для каждого* $k = 0, \ldots, n$ *функции* $\tau_i : \mathcal{N}_+^{1+k}\bigcup\mathcal{N}_-^{1+k} \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, *принадлежат классу* C^{r+1}. *В частности,* τ_i *непрерывно дифференцируемы на* $\mathcal{N}_+^{1+n}\bigcup\mathcal{N}_-^{1+n}$ $r + 1$ *раз.*

Доказательство. В разделе 2 показано, что отображение F^{-1} из $\mathcal{N}_+^{1+n}$ в $\mathcal{M}^{1+k}$, $0 \leqslant k \leqslant n$, обратное к F (см. (2)), является диффеоморфизмом класса C^{r+1}. Следовательно, кривая $\varepsilon \to p(\varepsilon) = (t(\varepsilon), \tau(q(\varepsilon))) \in \mathcal{M}^{1+k}$ представляет собой $r+1$ раз непрерывно дифференцируемую функцию аргумента ε в точке $\varepsilon = 0$, откуда, в силу определения (10), следует, что функция $q \to \tau_i(q)$ непрерывно дифференцируема $r + 1$ раз в каждой точке $q_0 \in \mathcal{N}_+^{1+n}$. Повторив те же рассуждения для многообразий $\mathcal{N}_-^{1+k}$, получим утверждение теоремы.

4. Позиционное управление, оптимальное в смысле быстродействия.

Лемма 2. *Точка* $(t, x^0(t))$, $x^0(t) = x^0(t, q_0)$, $q_0 \in \mathcal{N}_+^{n+1}$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \tau_n(q_0)$ *при движении* $t \to (t, x^0(t))$, *отвечающем оптимальному процессу* $(u^0(\cdot), \tau_n(q_0), x^0(\cdot))$ *задачи быстродействия в нуль, входит в каждое многообразие* $\mathcal{N}_{\nu(i)}^{n-i}$, $i = 0, \ldots, n-1$, *трансверсально* (*вместо* $\nu(i)$ *надо поставить знак «минус», если* i — *нуль или четное число и знак «плюс», если* i — *нечетное число*).

Доказательство. Докажем лемму для $i = 0$. Обозначим $t_1 = t_0 + \tau_1(q_0)$. Надо доказать, что вектор $v_1 = \mathrm{col}(1, \dot{x}^0(t_1))$, касательный к движению $t \to (t, x^0(t))$ в точке $q_1 = (t_1, x^0(t_1)) \in \mathcal{N}_-^n$, не лежит в пространстве $T_{q_1}\mathcal{N}_-^n$, касательном к многообразию $\mathcal{N}_-^n$.

По точке q_1 построим точку $p_1 = F^{-1}(q_1)$; здесь F^{-1} — функция, обратная F (см. (2), где надо положить $k = n - 1$ и «минус» перед знаком суммы заменить на «плюс»). Тогда $p_1 = (t_1, \theta)$, где $\theta = (\theta_2, \ldots, \theta_n)$, причем $\theta_i = \tau_i(q_0) - \tau_1(q_0)$ (см. замечание 2). Из построения следует, что

$$x^0(t_1) = x(p_1) = \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i-1}\int\limits_{t_1+\theta_i}^{t_1+\theta_{i+1}} X(t_1, t)b(t)\,dt, \quad \theta_1 = 0. \tag{11}$$

Таким образом, вектор скорости v_1 в точке q_1 равен $\mathrm{col}(1, A(t_1)x(p_1)+b(t_1))$. Далее, с учетом (11) и равенства (3) (в котором надо внести понятные изменениями, связанные с заменой многообразия $\mathcal{N}_+^{1+k}$ на многообразие $\mathcal{N}_-^n$) несложно убедиться, что векторы

$$l_1(q_1) = \mathrm{col}(1, A(t_1)x(p_1) - b(t_1)), \quad l_i(q_1) = \mathrm{col}(0, X(t_1, t_1 + \theta_i)b(t_1 + \theta_i)), \quad i = 2, \ldots, n,$$

образуют базис в $T_{q_1}\mathcal{N}_-^n$.

Если вектор v_1 лежит в пространстве $T_{q_1}\mathcal{N}_-^n$, то найдутся константы $c_1, \ldots, c_n$, не равные нулю одновременно, такие, что $v_1 = c_1 l_1(p_1) + \cdots + c_n l_n(p_1)$. Следовательно $c_1 = 1$ и поэтому $2b(t_1) = c_2 X(t_1, t_1+\theta_2)b(t_1+\theta_2)+\cdots+c_n X(t_1, t_1+\theta_n)b(t_1+\theta_n)$. Проведя рассуждения, близкие к доказательству свойства 3 работы [2], убеждаемся, что линейная зависимость векторов $X(t_0+\tau_1, t_0+\tau_i)b(t_0+\tau_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, противоречит условию $\tau_n(q_0) < \sigma(t_0)$. Лемма 2 доказана.

Пусть функция $q \to u(q)$, где $q \doteq (t, x)$, определена на внутренности расширенного множества управляемости $\mathfrak{D}$, принимает значения в $U = [-1, +1]$ и суперпозиционно измерима. $\mathcal{C}$-решением (решением в смысле Каратеодори) системы уравнений

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u(t, x), \tag{12}$$

называется всякая абсолютно-непрерывная функция $t \to x(t)$, удовлетворяющая при всех t равенству $x(t) = X(t, t_0)x(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} X(t, s)b(s)u(s, x(s))ds$, где t_0 — произвольный фиксированный момент времени. Основным недостатком $\mathcal{C}$-решений является их сильная чувствительность к изменениям функции $u(q)$ на множествах меры нуль. Этого недостатка лишены $\mathcal{F}$-решения (решения в смысле А. Ф. Филиппова [8, с. 40]). Кроме того, $\mathcal{F}$-решения наиболее приспособлены для описания прикладных задачах, допускающих моделирование с помощью дифференциальных уравнений с разрывными по фазовым координатам правыми частями.

Для определения решений в смысле Филиппова построим многозначную функцию

$$q \to \mathcal{F}(q) \doteq \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcap_{\operatorname{mes}\mu=0} \overline{\operatorname{conv}}\, u(O_\varepsilon(q) \setminus \mu), \quad q \in \operatorname{int}\mathfrak{D}, \tag{13}$$

где $O_\varepsilon(q)$ — ε-окрестность точки q, μ — произвольное множество в $\mathbb{R}^{1+n}$, мера Лебега $\operatorname{mes}\mu$ которого равна нулю, $\overline{\operatorname{conv}}\, Q$ — замыкание выпуклой оболочки множества Q. $\mathcal{F}$-решением системы (12) называется всякая абсолютно-непрерывная функция $t \to x(t)$, удовлетворяющая при почти всех t дифференциальному включению $\dot{x} \in A(t)x + b(t)\mathcal{F}(t, x)$.

Суперпозиционно измеримую функцию $u_{\mathcal{C}} : \mathfrak{D} \to U$ будем называть *оптимальным в смысле быстродействия позиционным $\mathcal{C}$-управлением* (кратко оптимальным $\mathcal{C}$-управлением), если для любой точки $q_0 \in \operatorname{int}\mathfrak{D}$, $\mathcal{C}$-решение $x(t, q_0)$ задачи

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u, \quad x(t_0) = x_0, \tag{14}$$

при $u = u_{\mathcal{C}}(q)$, существует на полуоси $[t_0, \infty)$, единственно, обращается в нуль в точке $t = t_0 + \tau_n(q_0)$ и $x(t, q_0) \equiv 0$ для $t > t_0 + \tau_n(q_0)$.

Аналогично определяется *оптимальное в смысле быстродействия позиционное $\mathcal{F}$-управление* (сокращенно оптимальное $\mathcal{F}$-управление). В этом случае функция $q \to u_{\mathcal{F}}(q)$ должна быть определена для почти всех (в смысле меры Лебега в $\mathbb{R}^{1+n}$) точек $q \in \operatorname{int}\mathfrak{D}$ и обеспечивать следующее свойство: каждому $q_0 \in \operatorname{int}\mathfrak{D}$ отвечает единственное $\mathcal{F}$-решение $x(t, q_0)$ задачи (14) с управлением $u = u_{\mathcal{F}}(q)$ и $x(t, q_0) \equiv 0$ для $t \geqslant t_0 + \tau_n(q_0)$. Подчеркнем еще раз, что в силу определения $\mathcal{F}$-решений, для построения оптимального $\mathcal{F}$-управления нет необходимости определять $u_{\mathcal{F}}(q)$ в каждой точке внутренности расширенного множества управляемости $\mathfrak{D}$; достаточно построить $u_{\mathcal{F}}(q)$ на множестве полной меры.

Известны примеры (см., например, [9], [10]) следующего аномального поведения линейных управляемых систем: оптимальное $\mathcal{C}$-управление существует и единственно, но оптимальное $\mathcal{F}$-управление отсутствует. Этот эффект возникает (даже для линейных стационарных систем) в том случае, когда оптимальное $\mathcal{C}$-управление (которое однозначно находится из принципа максимума Л. С. Понтрягина) определяет на поверхностях разрыва (имеющих нулевую меру Лебега) вектор скорости, не совпадающий с вектором скорости, задаваемом конструкцией Филиппова (13).

Теорема 4. *Пусть система* (1) *докритическая. Тогда функция*

$$u_{\mathcal{C}}(q) = \begin{cases} \pm 1, & \text{если } q \in \mathcal{N}_\pm^{1+k} \text{ при некотором } k \in \{1, \ldots, n\} \\ 0, & \text{если } k = 0 \end{cases} \tag{15}$$

доставляет оптимальное $\mathcal{C}$-управление, а функция

$$u_{\mathcal{F}}(q) = \pm 1, \quad \textit{если} \quad q \in \mathcal{N}_{\pm}^{1+n}, \qquad q \in \operatorname{int}\mathfrak{D} \tag{16}$$

— *оптимальное $\mathcal{F}$-управление.*

Доказательство теоремы 4 разобьем на несколько пунктов.

А. Пусть $q_0 \in \operatorname{int}\mathfrak{D}$. Предположим для определенности, что $q_0 \in \mathcal{N}_+^{1+k}$ при некотором $k \in \{1,\dots,n\}$ (если $k=0$, то $x(t,q_0) \equiv 0$). По точке q_0 построим точку $p_0 = (t_0, \tau)$, где вектор $\tau = (\tau_{n-k+1},\dots,\tau_n)$, $\tau_i = \tau_i(q_0)$, задает моменты переключений программного управления $u^0(t)$, оптимального в смысле быстродействия. Управлению $u^0(t)$ отвечает оптимальное решение $x^0(t)$ задачи (14) при $u = u^0(t)$, причем (см. (2))

$$x_0 = x^0(t_0) = -\sum_{i=n-k}^{n-1} (-1)^{i-n+k} \int\limits_{t_0+\tau_i}^{t_0+\tau_{i+1}} X(t_0,s)b(s)\,ds, \quad \tau_{n-k} = 0.$$

Б. Покажем, что $\mathcal{C}$-решение $x(t,q_0)$ задачи (14) при $u = u_C(q)$ существует, единственно и совпадает (при почти всех t) с решением $x^0(t)$. Так как $q_0 \in \mathcal{N}_+^{1+k}$, то $u_{\mathcal{C}}(q_0) = 1$, и вектор скорости $v_+(q) \doteq \operatorname{col}(1, A(t)x + b(t)u_{\mathcal{C}}(q))$ при $q = q_0$ находится в пространстве $T_{q_0}\mathcal{N}_+^{1+k}$ касательном к $\mathcal{N}_+^{1+k}$ в точке q_0. При t близких к t_0 включение $v_+(q(t)) \in T_{q(t)}\mathcal{N}_+^{1+k}$, где $q(t) = (t, x(t,q_0))$, сохраняется (так как $\mathcal{N}_+^{1+k}$ — многообразие без края), поэтому $\mathcal{C}$-решение $x(t,q_0)$ при t близких к t_0 существует, единственно, совпадает с $x^0(t)$ и

$$x(t,q_0) = \int\limits_{t_0}^{t} X(t,s)b(s)ds - \int\limits_{t_0}^{t_0+\tau_{n-k+1}} X(t,s)b(s)ds + \sum_{i=n-k+1}^{n-1} (-1)^{i-n+k+1} \int\limits_{t_0+\tau_i}^{t_0+\tau_{i+1}} X(t,s)b(s)ds. \tag{17}$$

Из (17) следует, что включение $v_+(q(t)) \in T_{q(t)}\mathcal{N}_+^{1+k}$ имеет место при всех $t \in I_1 \doteq [t_0, t_1)$, где $t_1 = t_0 + \tau_{n-k+1}$, поэтому $x(t,q_0) \in \mathcal{N}_+^k(t)$ при $t \in I_1$. Отметим далее, что $v_-(q(t)) \doteq \operatorname{col}(1, A(t)x - b(t)) \notin T_{q(t)}\mathcal{N}_+^{1+k}$, $t \in I_1$ (см. лемму 2). В момент времени $t = t_1$ картина меняется: $v_+(q(t_1)) \notin T_{q(t_1)}\mathcal{N}_+^{1+k}$, а вектор $v_-(q(t_1))$ касается многообразия $\mathcal{N}_-^k$ (являющегося краем многообразия $\operatorname{cl}\mathcal{N}_+^{1+k}$). Поэтому $\mathcal{C}$-решение $x(t,q_0)$ в момент времени t_1 покидает многообразие $\mathcal{N}_+^k(t)$ и переходит на многообразие $\mathcal{N}_-^{k-1}(t_1)$. Действительно, из (17) имеем

$$x(t_1,q_0) = +\sum_{i=n-k+1}^{n-1} (-1)^{i-n+k+1} \int\limits_{t_1+\theta_i}^{t_1+\theta_{i+1}} X(t_1,t)b(t)\,dt,$$

где $\theta_i = \tau_i - \tau_{n-k+1}$, $i = n-k+1,\dots,n$, поэтому $x(t_1,q_0) \in \mathcal{N}_-^{k-1}(t_1)$ и следовательно, $q(t_1) \in \mathcal{N}_-^k$. Поскольку для всех t близких к t_1 и удовлетворяющих неравенству $t \geqslant t_1$, имеет место включение $v_-(q(t)) \in T_{q(t)}\mathcal{N}_-^k$ (см. (15)), то $x(t,q_0)$ некоторое время остается на многообразии $\mathcal{N}_-^k$ и поэтому является классическим решением системы $\dot{x} = A(t)x - b(t)$. Потери единственности в точке t_1 не происходит, поскольку $\mathcal{C}$-решение $x(t,q_0)$ однозначно «сшивается» из двух классических решений. Таким образом, $\mathcal{C}$-решение $x(t,q_0)$ совпадает с $x^0(t)$ при $t \in [t_0, t_2)$, где $t_2 = t_1 + \theta_{n-k+2} = t_0 + \tau_{n-k+1}$.

Из приведенных рассуждений следует, что $\mathcal{C}$-решение существует, единственно и обращается в нуль при достаточно больших t (при $t = t_0 + \tau_n(q_0)$).

Построим функцию $u_1(t) = u_{\mathcal{C}}(t, x(t,q_0))$, где $x(t,q_0)$ — $\mathcal{C}$-решение. Функция $u_1(t)$ принимает два значения ($+1$ или -1), имеет переключения только в точках $t = t_0 + \tau_i(q_0)$, $i = n-k+1,\dots,n$ и решение $x_1(t)$ задачи (14) при $u = u_1(t)$ совпадает с $\mathcal{C}$-решением $x(t,q_0)$. Следовательно, $u_1(t)$ — программное управление, оптимальное в смысле быстродействия для задачи (14). Поэтому, в силу единственности оптимального управления, имеют место равенства $u_1(t) = u_0(t)$, $x_1(t) = x_0(t)$. Поэтому $u_{\mathcal{C}}(q)$ — оптимальное $\mathcal{C}$-управление.

В. Покажем, что всякое $\mathcal{F}$-решение системы $\dot{x} = A(t)x + b(t)u_{\mathcal{F}}(t,x)$, где $u_{\mathcal{F}}(q)$ определено равенством (16), является $\mathcal{C}$-решением системы $\dot{x} = A(t)x + b(t)u_{\mathcal{C}}(t,x)$. С этой целью построим для $u_{\mathcal{F}}(q)$ многозначную функцию $q \to \mathcal{F}(q)$, определенную равенством (13). Легко убедиться, что $\mathcal{F}(q)=1$, если $q\in\mathcal{N}_+^{1+n}$, $\mathcal{F}(q)=-1$, если $q\in\mathcal{N}_-^{1+n}$ и $\mathcal{F}(q)=[-1,1]$, если $q\in S$, где $S=\mathfrak{D}\setminus(\mathcal{N}_+^{1+n}\bigcup\mathcal{N}_-^{1+n})$ (отметим, что $\operatorname{mes}S=0$). Если $q_0\in\mathcal{N}_+^{1+n}\bigcup\mathcal{N}_-^{1+n}$, то $\mathcal{F}$-решение совпадает с $\mathcal{C}$-решением при всех $t\in[t_0,t_1)$.

Пусть $q_0\in S$ (для определенности будем считать, что $q_0\in\mathcal{N}_+^{1+k}$ при некотором $k=0,\ldots,n-1$). Тогда, согласно (13), вектор скорости направляющий движение $t\to q(t)$ в точке t_0, одновременно находится в множестве $V(q_0)\doteq\operatorname{col}(1,A(t_0)x_0+b(t_0)U)$ и касательном пространстве $T_{q_0}\mathcal{N}_+^{1+k}$. Покажем, что только один вектор $v_+(q_0)=\operatorname{col}(1,A(t_0)x_0+b(t_0))$ содержится в пересечении $V(q_0)\bigcap T_{q_0}\mathcal{N}_+^{1+k}$. Действительно, если при некотором $\lambda\in[-1,1)$, вектор $v_\lambda(q_0)=\operatorname{col}(1,A(t_0)x_0+b(t_0)\lambda)$ лежит в $T_{q_0}\mathcal{N}_+^{1+k}$, то $v_\lambda(q_0)$ можно разложить по базису $l_1(q_0)$, $l_i(q_0)$, $i=n-k+1,\ldots,n$, касательного пространства $T_{q_0}\mathcal{N}_+^{1+k}$ (см. доказательство леммы 2). Тогда, проведя рассуждения, аналогичные доказательству свойства 3 работы [2], получим противоречие с условием $\tau_n(q_0)<\sigma(t_0)$.

Таким образом, вектор скорости $\mathcal{F}$-решения в любой точке $q_0\in\mathcal{N}_+^{1+k}$ совпадает с вектором скорости $\mathcal{C}$-решения, поэтому $\mathcal{F}$-решение совпадает с $\mathcal{C}$-решением. Теорема доказана.

Примечание. После того, как эта работа была подготовлена к печати, вышла статья Э. Г. Альбрехта и Е. А. Ермоленко [11], посвящённая задаче синтеза оптимального по быстродействию управления для системы (1). В ней изучается возможность синтеза при несколько более слабых условиях, чем в нашей статье (вместо докритичности предполагается невырожденность), но именно в случае докритичности системы (1) удаётся полностью решить вопрос о гладкости функции быстродействия и корректно построить позиционное управление.

Работа финансируется Российским Фондом Фундаментальных Исследований (грант 97 — 01 — 00413) и конкурсным центром Удмуртского университета (грант 97 — 04)

Литература

1. *Николаев С. Ф, Тонков Е. Л.* // Изв. Ин-та матем. и информ. Ижевск. 1997, вып. 2 (8). С. 47 — 68.
2. *Николаев С. Ф., Тонков Е. Л.* // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35, №1. С. 107 — 115.
3. *Лейхтвейс К.* Выпуклые множества. М., 1985.
4. *Палис Ж., ди Мелу В.* Геометрическая теория динамических систем.М., 1986.
5. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. М., 1974.
6. *Родионова А. Г., Тонков Е. Л.* // Изв. ВУЗ-ов. Математика. 1993. №5 (372). С. 101 — 111.
7. *Крейн М. Г., Нудельман А. А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М., 1973.
8. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
9. *Brunovski P.* // Lect. Contr. and Inform. Sci. 1980, V.22, P.280-284.
10. *Brunovski P.* // J. Different. Equat., 1980, V.38, №3, P.317-343.
11. *Альбрехт Э. Г., Ермоленко Е. А.* // Дифференц. уравнения. 1977. Т.33, №11. С. 1443 — 1450.

Институт математики и информатики
при Удмуртском государственном университете

Поступила в редакцию
20 января 1998 г.