1999. Т. 35, №1. С. 107 — 115

УДК 517.977

СТРУКТУРА МНОЖЕСТВА УПРАВЛЯЕМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ ДОКРИТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

С. Ф. Николаев, Е. Л. Тонков

Введение. В работе, продолжающей исследования [1, 2, 3], изучается структура множества управляемости линейной нестационарной системы

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad |u| \leqslant 1. \tag{1}$$

в предположении неосцилляции сопряженной системы $\dot{\psi} = -\psi A(t)$ относительно гиперплоскости, определяемой нормальным вектором $b(t)$. Такие системы названы в [3] докритическими. Термин «докритичность» введен в 50-е годы Н. В. Азбелевым в работах, посвященных краевым задачам и дифференциальным неравенствам: так назывался максимальный интервал разрешимости фиксированного класса задач Валле-Пуссена. Оказалось, что вопрос о существовании оптимального в смысле быстродействия позиционного управления для системы (1), тесно связан с вопросом о разрешимости некоторого класса n-точечных задач (что, правда, не фиксируется в этой статье), поэтому мы и позволили себе заимствовать этот термин.

Ниже показано, что в предположении докритичности граница множества управляемости есть объединение непересекающихся гладких многообразий (гладкость на единицу выше гладкости функции $t \to (A(t), b(t))$), размерность которых понижается с $n-1$ до нуля, причём объединение многообразий, размерность которых повышается от нуля до $k-1$, является общим краем замыкания объединения многообразий, размерность которых понижается с $n-1$ до k. Описанную структуру границы естественно называть факторизацией Полиа и Маммана, поскольку (как уже отмечалось) глубинные причины такой структуры связаны с представлением докритического дифференциального оператора n-го порядка в виде произведения дифференциальных операторов первого порядка.

Оказывается далее, что в предположении докритичности множество управляемости в расширенном фазовом пространстве (пространстве (t, x)-переменных) тоже допускает факторизацию Полиа и Маммана: оно представимо в виде замыкания объединения слабо инвариантных гладких многообразий, размерность которых понижается от $n+1$ до единицы, причём многообразие размерности k служит краем замыкания многообразия размерности $k+1$.

Такая структура позволяет корректно определить позиционное управление, оптимальное в смысле быстродействия. При этом позиционное управление достаточно задать только на многообразии максимальной размерности, так как движения $(t, x(t))$ (в смысле Филиппова) системы с разрывной по фазовым координатам правой частью не зависят от того, как определена правая часть на множествах, мера Лебега которых (в расширенном фазовом пространстве) равна нулю. Таким образом, наличие факторизации Полиа-Маммана влечет существование позиционного управления, оптимального в смысле быстродействия. Построению позиционного управления будет посвящена отдельная статья.

1. Обозначения и определения. В статье используются следующие обозначения: $\mathbb{R}^n$ — евклидово пространство размерности n с нормой $|x| = \sqrt{x^* x}$ ($*$ — операция транспонирования). Если не оговорено другое, векторы-столбцы обозначаются латинскими буквами, векторы-строки — греческими (таким образом, запись ξx означает скалярное произведение векторов ξ и x); $\mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ — пространство линейных отображений в $\mathbb{R}^n$ с нормой $|A| = \max\{|Ax| \colon |x| \leqslant 1\}$.

Пусть D — произвольное множество в $\mathbb{R}^n$. Обозначим $\operatorname{int} D$ — внутренность множества D относительно $\mathbb{R}^n$, $\operatorname{cl} D$ — замыкание D в $\mathbb{R}^n$. *Опорной функцией* $\xi \to \mathrm{c}(\xi, D)$ множества D называется функция, определенная равенством $\mathrm{c}(\xi, D) = \sup\{\xi x \colon\ x \in D\}$. Свойства опорной функции см. [4, с.121]. Для нас важно, что включение $0 \in \operatorname{int} D$ эквивалентно неравенству $\mathrm{c}(\xi, D) > 0$ для всех $\xi \in S^{n-1}$, где $S^{n-1} \doteq \{\xi \in \mathbb{R}^n \colon |\xi| = 1\}$.

Напомним [5], что если M и N — многообразия класса C^r, $r \geqslant 1$, вложенные в конечномерные пространства и f — отображение из M в N, то f принадлежит классу C^k, $k \leqslant r$, в точке $p \in M$, если для любой k раз непрерывно дифференцируемой кривой $p\colon (-1, 1) \to M$, проходящей через точку p ($p(0) = p$), функция $\varepsilon \to f(p(\varepsilon))$ из $(-1, 1)$ в N принадлежит классу C^k в точке $\varepsilon = 0$. Далее, отображение $df(p)\colon T_pM \to T_qN$, действующее из пространства T_pM, касательного к M в точке p в пространство T_qN, касательное к N в точке $q = f(p)$ и определенное равенством $df(p)v = df(p(\varepsilon))/d\varepsilon|_{\varepsilon=0}$ для всякой C^k-кривой $p\colon (-1,1) \to M$ ($p(0) = p$, $dp(\varepsilon)/d\varepsilon|_{\varepsilon=0} = v \in T_pM$), называется производной отображения f в точке p. Отображение $f\colon M \to N$ называется *C^k-диффеоморфизмом*, если оно принадлежит классу C^k и имеет обратное того же класса. *Если $f\colon M \to N$ отображение класса C^k и $df(p)$ — изоморфизм для каждого $p \in M$, то f — диффеоморфизм класса C^k.*

Всюду далее предполагается, что функции $A\colon \mathbb{R} \to \operatorname{End}(\mathbb{R}^n)$, $b\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, задающие систему (1), непрерывны.

Функцией быстродействия $(t, x) \to \tau_n(t, x)$ системы (1) называется функция, значение которой в каждой точке (t_0, x_0) определяется равенством $\tau_n(t_0, x_0) = \min\limits_{u(\cdot)\in\mathcal{U}}\{\vartheta \geqslant 0 :$ $x(t_0 + \vartheta, t_0, x_0, u(\cdot)) = 0\}$, где $\mathcal{U}$ — совокупность измеримых функций со значениями в $[-1, 1]$, $x(t, t_0, x_0, u(\cdot))$ — решение системы (1) при управлении $u = u(t)$ и начальном условии $x(t_0) = x_0$. Если для некоторой точки (t_0, x_0) не существует допустимого управления, переводящего решение в нуль за конечное время, будем полагать, что $\tau_n(t_0, x_0) = \infty$.

Множеством управляемости системы (1) *на отрезке* $[t_0, t_0 + \vartheta]$ называется множество $D_\vartheta(t_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \tau_n(t_0, x) \leqslant \vartheta\}$. Для $D_\vartheta(t_0)$ имеет место равенство (см., например, [6, с.103])

$$D_\vartheta(t_0) = -\int\limits_{t_0}^{t_0+\vartheta} X(t_0, t)b(t)U dt, \tag{2}$$

где $U = [-1, 1]$, $X(t, s)$ — матрица Коши системы $\dot{x} = A(t)x$, а интеграл понимается в смысле А. А. Ляпунова [7, с.229].

Система (1) называется *дифференциально управляемой в точке* t_0, если для всех $\vartheta > 0$ имеет место включение $0 \in \operatorname{int} D_\vartheta(t_0)$, и *дифференциально управляемой на интервале* $J \subset \mathbb{R}$, если она дифференциально управляема в каждой точке этого интервала. В [6] (см. лемму 1 и теорему 2) показано, что если система (1) дифференциально управляема на J, то для любого $t_0 \in J$ *множество управляемости* $D(t_0) \doteq \bigcup\limits_{\vartheta\geqslant 0} D_\vartheta(t_0)$ открыто в $\mathbb{R}^n$, и функция быстродействия непрерывна в каждой точке $(t_0, x_0) \in J \times D(t_0)$.

Множество $\mathfrak{N}$ в расширенном фазовом пространстве $\mathbb{R}^{1+n}$ системы (1) называется *слабо инвариантным*, если для любой точки $(t_0, x_0) \in \mathfrak{N}$ существует управление $u_0 \in \mathcal{U}$ такое, что решение $x_0(t)$ системы (1) при $u = u_0(t)$ и начальном условии $x_0(t_0) = x_0$, удовлетворяет включению $(t, x_0(t)) \in \mathfrak{N}$ для всех $t \geqslant t_0$. В частности, *расширенное множество управляемости* $\mathfrak{D} \doteq \mathbb{R} \times D_{\sigma(t)}(t)$ слабо инвариантно (для любой функции $\sigma(t)$, удовлетворяющей неравенству $\sigma(t) > 0$ при всех $t \in \mathbb{R}$).

2. Докритичность и неосцилляция. Пусть $\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)$ — произвольная фундаментальная система решений сопряженного уравнения

$$\dot{\psi} = -\psi A(t). \tag{3}$$

Обозначим через $\sigma(t_0)$ точную верхнюю грань таких $\sigma > 0$, что на полуинтервале $[t_0, t_0 + \sigma)$ совокупность функций

$$\xi_1(t) \doteq \psi_1(t)b(t)\,, \ \ldots\,, \ \xi_n(t) \doteq \psi_n(t)b(t) \tag{4}$$

является чебышевской системой (Т-системой). Это означает, что всякая нетривиальная линейная комбинация функций (4) имеет на $[t_0, t_0+\sigma)$ не более $n-1$ геометрически различных (т. е. без учета кратностей) нулей. Из определения $\sigma(t_0)$ следует, что для любого $\vartheta \in [0, \sigma(t_0)]$ всякое нетривиальное решение системы (3) пересекает гиперплоскость $\gamma(t) \doteq \{\psi \in \mathbb{R}^n \colon \psi b(t) = 0\}$ не более $n-1$ раз, когда t пробегает интервал $[t_0, t_0+\vartheta)$. Это свойство названо в [1] свойством *неосцилляции* системы (3) на интервале $[t_0, t_0+\vartheta)$ относительно гиперплоскости $\gamma(t)$. Простые примеры показывают, что функция $t \to \sigma(t)$ (принимающая неотрицательные конечные значения или $+\infty$) может быть разрывной, но она всегда полунепрерывна снизу (если t_0 — точка разрыва, то $\sigma(t_0-0) = \sigma(t_0) < \sigma(t_0+0)$). Отметим еще, что совокупность (4) является T-системой на $[t_0, t_0+\vartheta)$ в том и только в том случае, если для любого набора точек $t_1, \dots, t_n$ таких, что $t_0 \leqslant t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_0+\vartheta$, определитель $\det(\xi_i(t_j))_{i,j=1}^n$ отличен от нуля (см. [8, с.51]).

Основное свойство T-систем, необходимое для дальнейшего, известно под названием теоремы С.Н. Бернштейна [8, с.53]: *если совокупность* (4) *является T-системой на* $[t_0, t_0+\vartheta)$, *то для любого набора точек $t_1, \dots, t_{n-1}$ таких, что $t_0 \leqslant t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_0+\vartheta$, найдется линейная комбинация функций* (4), *имеющая простые нули в точках t_i и не имеющая других нулей на* $[t_0, t_0+\vartheta)$.

О п р е д е л е н и е 1. Система (1) называется докритической на интервале J, если для всех $t \in J$ выполнено неравенство$\sigma(t) > 0$.

Л е м м а 1. *Если система* (1) *докритическая на J, то она дифференциально управляема для всех $t \in J$.*

Действительно, для каждого $t_0 \in J$ и любого $\vartheta \in (0, \sigma(t_0))$, опорная функция $\psi \to c(\psi, D_\vartheta(t_0))$ множества $D_\vartheta(t_0)$ определяется равенством $\int\limits_{t_0}^{t_0+\vartheta} |\xi(t)| dt$, где $\xi(t) = \psi(t)b(t)$, $\psi(t)$ — решение системы (3) с условием $\psi(t_0) = -\psi$. Поэтому $\min\limits_{\psi}\{c(\psi, D_\vartheta(t_0)) \colon \psi \in S^{n-1}\} > 0$, что и доказывает лемму.

Т е о р е м а 1. *Всякая система вида* (1), *приводимая невырожденным преобразованием $z(t) = L(t)x$ ($L(t)$ непрерывно дифференцируема и $det L(t) \neq 0$, $t \in J$) к канонической системе*

$$\dot{z} = F(t)z + g(t)u, \tag{5}$$

докритична. Здесь $F(t) = \{f_{ij}(t)\}_{i,j=1}^n$, $f_{ij}(t) = 0$ для $i > j+1$, — верхняя треугольная матрица с ненулевой поддиагональю, состоящей из элементов $f_{i+1,j}(t) = \beta_{i+1}(t)$, $i = 1, \dots, n-1$, $g(t) = \mathrm{col}(\beta_1(t), 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$, причем функции $f_{ik}(t)$, $\beta_i(t)$ непрерывны и $\beta_i(t) > 0$ при всех $t \in J$ и $i = 1, \dots, n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $\sigma(t; A, b)$ функцию $\sigma(t)$, построенную по системе (1). Покажем, что $\sigma(t; A, b)$ инвариантна относительно невырожденного преобразования $z = L(t)x$ (т. е. $\sigma(t; A, b) = \sigma(t; F, g)$, где $F = (\dot{L} + LA)L^{-1}$, $g = Lb$). Действительно, решения системы (3) и системы

$$\dot{\eta} = -\eta F(t), \tag{6}$$

сопряженной к системе $\dot{z} = F(t)z$, связаны равенством $\psi(t) = \eta(t)L(t)$; поэтому (см. (4)) $\xi_i(t) = \psi_i(t)b(t) = \eta_i(t)L(t)b(t) = \eta_i(t)g(t)$.

Пусть F и g взяты из системы (5); покажем, что $\sigma(t; F, g) > 0$ для всех $t \in J$. Отметим во-первых, что из условия $\beta_1(t) > 0$ следует равенство $\sigma(t; F, g) = \sigma(t; F, e_1)$, где $e_1 = \mathrm{col}(1, 0, \dots, 0)$, поэтому будем далее предполагать, что $g = e_1$. Во-вторых, можно считать, что все функции на главной диагонали матрицы F равны нулю. Действительно, невырожденное преобразование $\xi^{(i)} = \eta^{(i)} \exp \int\limits_0^t f_{ii}(s)\, ds$, $i = 1, \dots, n$ (верхний индекс в круглых скобках означает соответствующую координату вектора) приводит (6) к виду $\dot{\xi} = -\xi F^0(t)$, где главная диагональ матрицы F^0 состоит из нулей.

Для каждого $k = 3, \dots, n$ введём в рассмотрение матрицы $U_k(t) = (m(t), e_2, \dots, e_k)^* \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^k)$, где $m(t) = \mathrm{col}(\mu^{(1)}(t), \dots, \mu^{(k)}(t))$, $F_{k-1}(t) = \{q_{ij}(t)\}_{i,j=1}^{k-1} \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^{k-1})$, где $q_{ij}(t) = 0$ при $i > j+1$ и $i = j$, $q_{i+1,j}(t) = -\beta_{n-k+i+2}(t)$.

Пусть $\mu(t)$ — решение системы (6) с начальным условием $\mu(t_0) = e_1$, $t_0 \in J$, а число ε_1 таково, что $\mu^{(1)}(t) > 0$ для всех $t \in J_1 \doteq [t_0, t_0 + \varepsilon_1]$. Выполним на J_1 невырожденное преобразование $\eta = \xi U_n(t)$; тогда $\eta^{(1)} = \mu^{(1)}(t)\xi^{(1)}$, $\eta^{(i)} = \mu^{(i)}(t)\xi^{(1)} + \xi^{(i)}$, $i = 2, \dots, n$, и система (6) относительно ξ примет вид

$$\dot{\xi}^{(1)} = \xi^{(2)}\beta_2(t)/\mu^{(1)}(t), \quad \dot{\eta}_1 = -\eta_1 F_{n-1}(t),\ \eta_1 = (\xi^{(2)}, \dots, \xi^{(n)}) \in \mathbb{R}^{n-1}, \tag{7}$$

(преобразование $\eta = \xi U_n(t)$ не обеспечивает нулевую диагональ матрицы $F_{n-1}(t)$, но, как отмечалось, её можно сделать нулевой).

Выполненное преобразование обладает следующим свойством. Если (6) имеет такое нетривиальное решение $\eta(t)$, что на некотором интервале $[t_0, t_0 + \delta)$, $\delta \leqslant \varepsilon$ первая координата $\eta^{(1)}(t)$ обращается в нуль по крайней мере n раз, то, в силу (8), существует нетривиальное решение $\eta_1(t)$ системы $\dot{\eta}_1 = -\eta_1 F_{n-1}(t)$ такое, что первая координата этого решения имеет на $[t_0, t_0 + \delta)$ по крайней мере $n - 1$ нуль.

Продолжая этот процесс канонизации, по системе $\dot{\eta}_1 = -\eta_1 F_{n-1}(t)$ и решению $\mu_1(t)$ этой системы, удовлетворяющему условию $\mu_1(t_0) = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n-1}$, построим на отрезке $J_2 \doteq [t_0, t_0 + \varepsilon_2]$, где $\mu_1^{(1)}(t) > 0$, новую систему $\dot{\eta}_2 = -\eta_2 F_{n-2}(t)$, $\eta_2 \in \mathbb{R}^{n-2}$. Эта система обладает тем свойством, что если у системы (6) есть решение, первая координата которого имеет не менее n нулей на $[t_0, t_0 + \delta)$, $\delta \leqslant \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, то найдется решение системы $\dot{\eta}_2 = -\eta_2 F_{n-2}(t)$ первая координата которого $[t_0, t_0 + \delta)$ имеет по крайней мере $n - 2$ нуля.

На последнем шаге каноническая система превращается в уравнение $\dot{\eta} = 0$, любое нетривиальное решение которого не имеет нулей. Теорема доказана.

Допустим, что система (1) удовлетворяет следующим двум условиям.

У с л о в и е 1. Для каждого $i = 1, \dots, n + 1$ функции $t \to q_i(t)$, определенные равенствами $q_1(t) = b(t), \dots, q_i(t) = \dot{q}_{i-1}(t) - A(t)q_{i-1}(t)$, непрерывны, ограничены на $\mathbb{R}$ и $\det Q(t) \neq 0$ при всех $t \in \mathbb{R}$, где $Q(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t))$.

У с л о в и е 2. Найдутся числа $\nu_1, \dots, \nu_{n-1}$ такие, что $\nu_1 \leqslant \nu_2 \leqslant \dots \leqslant \nu_{n-1}$ и для корней $\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)$ уравнения $\det(\lambda Q(t) - H(t)) = 0$, где $H(t) = (q_2(t), \dots, q_{n+1}(t))$, при всех t выполнены неравенства

$$\lambda_1(t) \leqslant \nu_1 \leqslant \lambda_2(t) \leqslant \dots \leqslant \nu_{n-1} \leqslant \lambda_n(t). \tag{8}$$

Т е о р е м а 2. *Если выполнены условия* 1 *и* 2, *то* $\sigma(t) = \infty$ *для всех* $t \in \mathbb{R}$. *Далее, если найдутся такие константы* $\varepsilon > 0$ *и* $\delta \geqslant 0$, *что дополнительно к* (8) *при всех достаточно больших* t *выполнены неравенства* $\delta \leqslant \lambda_1(t)$, $\nu_{i-1} + \varepsilon \leqslant \lambda_i(t) \leqslant \nu_i - \varepsilon$, $i = 2, \dots, n - 1$, *то при всех* $t \in \mathbb{R}$ *множество управляемости* $D(t)$ *системы* (1) *совпадает с* $\mathbb{R}^n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $r(t) = \mathrm{col}(r_1(t), \dots, r_n(t))$ — решение алгебраической системы $Q(t)r = q_{n+1}(t)$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что замена $z = L(t)x$, $L = Q^{-1}$, приводит систему (1) к системе (5), где $\beta_i(t) \equiv 1$, $f_{in}(t) = -r_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, $f_{ik}(t) \equiv 0$, $i \leqslant k$, $i, k = 1, \dots, n - 1$. Поэтому $\sigma(t) > 0$. Далее, легко видеть, что система (6) эквивалентна уравнению

$$\xi^{(n)} = r_1(t)\xi + \dots + r_n(t)\xi^{(n-1)}. \tag{9}$$

Покажем, что $\sigma(t) = \infty$. В силу следствия 5.3 работы [9], если найдутся такие числа $\nu_0, \dots, \nu_{n-1}$, что $\nu_0 < \nu_1 < \dots < \nu_{n-1}$ и корни $\mu_1(t), \dots, \mu_n(t)$ характеристического уравнения

$$\mu^n = r_1(t) + r_2(t)\mu + \dots + r_n(t)\mu^{n-1} \tag{10}$$

удовлетворяют неравенствам (8) (с заменой μ_i на λ_i) и неравенству $\nu_0 \leqslant \mu_1(t)$, то для уравнения (9) $\sigma(t) = \infty$ при всех $t \in [0, +\infty)$. Более того, существует такая фундаментальная система $\xi_1(t), \dots, \xi_n(t)$ уравнения (9), что $c_i \exp(\nu_{i-1}t) \leqslant \xi_i(t) \leqslant d_i \exp(\nu_i t)$, $i = 1, \dots, n - 1$, $c_n \exp(\nu_{n-1}t) \leqslant \xi_n(t)$, $t \in [0, \infty)$, где c_i, d_i — некоторые положительные константы.

Покажем, что $\mu_i(t) = \lambda_i(t)$. Действительно, корни уравнения (10) являются собственными значениями матрицы $\widehat{H}(t) \doteq (e_2, \dots, e_n, r(t))$, где e_i — i-ый орт, поэтому $\det(\mu(t)I - \widehat{H}(t)) = 0$

для каждого корня $\mu(t)$ уравнения (10). Следовательно, $\det Q(t)(\mu(t)I - \widehat{H}(t)) = \det(\mu(t)Q(t) - Q(t)\widehat{H}(t))$. Так как $Q(t)\widehat{H}(t) = H(t)$, то $\det(\mu(t)Q(t) - H(t)) = 0$. Следовательно, всякий корень уравнения (10) является одновременно решением уравнения $\det(\lambda Q(t) - H(t)) = 0$, поэтому $\sigma(t) = \infty$.

Покажем, что $D(t) = \mathbb{R}^n$. Так как функция $\xi(t) = -\psi X(t_0, t)b(t)$ является решением уравнения (9), то опорная функция $c(\psi, D_\vartheta(t))$ множества $D_\vartheta(t)$ имеет вид $c(\psi, D_\vartheta(t)) = \int\limits_t^{t+\vartheta} |\xi(s)|\, ds$. В силу неравенства $\delta \leqslant \lambda_1(t)$, из условия теоремы 2 и уже цитированного следствия 5.3 работы [9], найдётся $\alpha > 0$, что $|\xi(t)| \geqslant \alpha$, поэтому $c(\psi, D_\vartheta(t)) \to \infty$ при $\vartheta \to \infty$ и любом $\psi \neq 0$. Теорема доказана.

П р и м е р 1. Рассмотрим систему уравнений $\dot{x}_1 = a_1(t)x_1 + a_2(t)x_3 + u, \quad \dot{x}_2 = x_1, \quad \dot{x}_3 = x_1 + a_3(t)x_3$, описывающую (в линейном приближении) динамику летательного аппарата с переменными аэродинамическими характеристиками (см. [10]). Здесь x_2 — угол тангажа, x_3 — угол атаки, u — отклонение руля высоты. Непосредственно проверяется, что если a_i не зависят от t, то неравенство $a_3 \neq 0$ является необходимым и достаточным условием докритичности системы, а условия $a_3 \neq 0$, $(a_1 - a_3)^2 + 4a_2 \geqslant 0$ обеспечивают глобальную докритичность (то есть $\sigma = \infty$). Пусть теперь функции $t \to a_i(t)$ непрерывны, и для всех t выполнено условие $a_3(t) \neq 0$. Можно показать тогда (с применением теорем 1 и 2), что если для каждого t найдется такое $\vartheta > 0$, что выполнены неравенства

$$-1 \leqslant a_3(t) \int\limits_t^{t+\vartheta} a_2(s) \exp \int\limits_t^{s} (a_3(\tau) - a_1(\tau))\, d\tau\, ds \leqslant 0,$$

то система докритическая, причем $\sigma(t) > \vartheta$. В частности, если $a_3(t) < 0$ и $a_2(t) \geqslant 0$, или $a_3(t) > 0$ и $a_2(t) \leqslant 0$, то $\sigma(t) > 0$.

3. Структура границы множества управляемости. Будем далее предполагать, что функции $A\colon \mathbb{R} \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ и $b\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, задающие систему (1), ограничены на $\mathbb{R}$, принадлежат классу C^r (т. е. r раз непрерывно дифференцируемы на $\mathbb{R}$), где $r \geqslant 0$, и система (1) докритична.

Если $\vartheta \leqslant \sigma(t_0)$, то, в силу принципа максимума Л. С. Понтрягина,

$$\max_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} \psi(t)b(t)u = \psi(t)b(t)u(t), \qquad t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \vartheta, \tag{11}$$

для всякой точки $x_0 \in D_\vartheta(t_0)$ найдутся целое k, $0 \leqslant k \leqslant n-1$ и вектор $\tau \in M^k(\vartheta)$, где $M^0(\vartheta) \doteq \{0\}$, $M^k(\vartheta) \doteq \{\tau = (\tau_{n-k}, \ldots, \tau_{n-1}) \in \mathbb{R}^k\colon\ 0 < \tau_{n-k} < \cdots < \tau_{n-1} < \vartheta\}$, $k = 1, \ldots, n-1$, такие, что управление, переводящее $x_0 = x(t_0)$ в начало координат за минимальное время, принимает значения $+1$ или -1 и имеет переключения только в точках $t_0 + \tau_i$, $i = n-k, \ldots, n-1$ (точки $t_0 + \tau_i$, $i = n-k, \ldots, n-1$, отвечают нулям функции $\xi(t) \doteq \psi(t)b(t)$, где $\psi(t)$ — некоторое нетривиальное решение системы (3)). В силу условия $\vartheta < \sigma(t_0)$, таких переключений не более $n-1$. Множеству $M^0(\vartheta)$ отвечают точки из $D_\vartheta(t_0)$, переходящие в нуль под действием управлений без переключений. Будем интерпретировать $M^k(\vartheta)$ как вложенные (в $\mathbb{R}^k$) гладкие многообразия размерности k с естественной топологией.

Для каждого $k = 0, \ldots, n-1$ построим множества $N_+^k(t_0, \vartheta)$ и $N_-^k(t_0, \vartheta)$ следующим образом: $N_+^k(t_0, \vartheta)$ состоит из всех таких точек $x_0 \in D_\vartheta(t_0)$, для каждой из которых найдётся точка $\tau(t_0, x_0) \in M^k(\vartheta)$ такая, что оптимальное управление $u(t, x_0)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \vartheta$, переводит точку $x(t_0) = x_0$ в точку $x(t_0 + \vartheta) = 0$, имеет переключения только в моменты времени $t = t_0 + \tau_i(t_0, x_0)$ и до первого момента переключения $u(t, x_0) = +1$. При этом множество $N_+^0(t_0, \vartheta)$ состоит из одной точки: $N_+^0(t_0, \vartheta) = \{-\int_{t_0}^{t_0+\vartheta} X(t_0, t)b(t)\, dt\}$. Множества $N_-^k(t_0, \vartheta)$ определяются аналогично с заменой управления $u(t, x_0)$ на -1 при $t_0 \leqslant t < t_0 + \tau_{n-k}(t_0, x_0)$. Множества $N_+^k(t_0, \vartheta)$ и $N_-^k(t_0, \vartheta)$, $k = 0, \ldots, n-1$, обладают следующими свойствами.

С в о й с т в о 1. *Пусть* $\vartheta \leqslant \sigma(t_0)$. *Тогда* $N_+^k(t_0, \vartheta) \subset \partial D_\vartheta(t_0)$ *и всякой точке* $x_0 \in N_+^k(t_0, \vartheta)$ *отвечает единственная точка* $\tau(t_0, x_0) \in M^k(\vartheta)$ *(набор моментов переключения) такая, что управление* $u(t, x_0)$*, удовлетворяющее принципу максимума* (11)*, переводит* $x_0 = x(t_0)$ *в* $x(t_0 + \vartheta) = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, так как $N_+^k(t_0,\vartheta) \subset D_\vartheta(t_0)$, то существование точки $x_0 \in N_+^k(t_0,\vartheta)$ не принадлежащей $\partial D_\vartheta(t_0)$, влечёт включение $x_0 \in \operatorname{int} D_\vartheta(t_0)$. Следовательно, время быстродействия $\tau_n(t_0,x_0)$ удовлетворяет неравенству $\tau_n(t_0,x_0) < \vartheta$. Соответствующее управление $u_0(t)$ удовлетворяет условию (11) для некоторого нетривиального решения $\psi_0(t)$ уравнения (3). С другой стороны, из определения $N_+^k(t_0,\vartheta)$ следует, что существует $\tau \in M^k(\vartheta)$, при котором управление $u(t,\tau)$ также переводит x_0 в нуль за время ϑ. Доопределим $u_0(t)$ на $(t_0+\tau_n(t_0,x_0), t_0+\vartheta]$ тождественным нулём и рассмотрим функцию $v(t) = u(t,\tau) - u_0(t)$. Эта функция, как легко видеть, сохраняет знак на интервалах $(t_0+\tau_i, t_0+\tau_{i+1})$, $i = n-k-1,\dots,n-1$, $\tau_{n-k-1} = 0$, $\tau_n = \vartheta$, причём $(-1)^i v(t) \geqslant 0$ при $t \in (t_0+\tau_i, t_0+\tau_{i+1})$. Следовательно, функция $v(t)$ имеет на $[t_0, t_0+\vartheta]$ не более k перемен знака, т. е. существует не более k различных точек $t_1 < t_2 < \dots < t_k$ интервала $(t_0, t_0+\vartheta)$ таких, что $v(t_i)v(t_{i+1}) < 0$. Далее, функция $y(t) \doteq x(t) - x_0(t)$ ($x(\cdot)$ и $x_0(\cdot)$ — решения системы (1), выходящие из точки $x_0 = x(t_0)$ и отвечающие управлениям $u(\cdot)$ и $u_0(\cdot)$) является решением задачи $\dot y = A(t)y + b(t)v(t)$, $y(t_0) = y(t_0+\vartheta) = 0$ и поэтому

$$\int_{t_0}^{t_0+\vartheta} X(t_0,t)b(t)v(t)\,dt = 0. \tag{12}$$

Далее, в силу теоремы Бернштейна, найдётся вектор $\psi \neq 0$ такой, что функция $\xi(t) = \psi X(t_0,t)b(t)$ имеет нули в точках перемен знака функции $v(t)$ и $\xi(t)v(t) \geqslant 0$ при $t_0 \leqslant t \leqslant t_0+\vartheta < t_0+\sigma(t_0)$. Умножая (12) на ψ, получим равенство $\int_{t_0}^{t_0+\vartheta} \xi(t)v(t)\,dt = 0$. Следовательно, $v(t) \equiv 0$ и поэтому $u(t,\tau) \equiv u_0(t)$ при $t_0 \leqslant t \leqslant t_0+\vartheta$, что противоречит предположению $\tau_n(t_0,x_0) < \vartheta$.

Доказательство единственности управления $u(t,\tau)$, отвечающего точке $x_0 \in N_+^k(t_0,\vartheta)$ аналогично: если управления $u(t,\tau)$, $u_0(t)$, переводят $x(t_0) = x_0$ в $x(t_0+\vartheta) = 0$, то имеет место равенство (12), где $v(t) = u(t,\tau) - u_0(t)$. Свойство 1 доказано.

В силу свойства 1, для каждого $\vartheta \leqslant \sigma(t_0)$ и любого фиксированного $k = 0,\dots,n-1$ определена функция $f^{-1}\colon N_+^k(t_0,\vartheta) \to M^k(\vartheta)$, ставящая в соответствие точке $x \in N_+^k(t_0,\vartheta)$ точку $\tau \in M^k(\vartheta)$, задающую моменты переключений оптимального управления $u(t,\tau)$. Функция $f^{-1} = f_k^{-1}$ зависит от ϑ и индекса k, но без необходимости мы это не подчеркиваем.

С в о й с т в о 2. *Функция f^{-1} непрерывна и осуществляет гомеоморфизм множеств $N_+^k(t_0,\vartheta)$ и $M^k(\vartheta)$. Обратная функция $f\colon M^k(\vartheta) \to N_+^k(t_0,\vartheta)$ определена равенством*

$$f(\tau) = \sum_{i=n-k-1}^{n-1} (-1)^{i-n+k} \int_{t_0+\tau_i}^{t_0+\tau_{i+1}} X(t_0,t)b(t)\,dt, \tag{13}$$

где $\tau_{n-k-1} = 0$, $\tau_n = \vartheta$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что функция f^{-1} непрерывна. Пусть последовательность $\{x_j\}_1^\infty \subset N_+^k(t_0,\vartheta)$ такова, что $x_j \to x_0 \in N_+^k(t_0,\vartheta)$. Последовательности $\{x_j\}_1^\infty$ отвечает последовательность $\{\tau_j\}$, $\tau_j = f^{-1}(x_j) \in M^k(\vartheta)$, а точке x_0 — точка $\tau_0 = f^{-1}(x_0) \in M^k(\vartheta)$. Надо показать, что $\tau_j \to \tau_0$. Выделим из последовательности $\{\tau_j\}_1^\infty$ сходящуюся подпоследовательность, которую снова обозначим $\{\tau_j\}_1^\infty$. Предел этой последовательности $\tau_* \in \operatorname{cl} M^k(\vartheta)$. Пусть управление $u(t,\tau_j)$ отвечает точке x_j (т. е. переводит x_j в нуль), тогда

$$x_j = -\int_{t_0}^{t_0+\vartheta} X(t_0,t)b(t)u(t,\tau_j)\,dt. \tag{14}$$

Последовательность $\{u(t,\tau_j)\}_1^\infty$ слабо сходится к $u(t,\tau_*)$, поэтому, переходя в (14) к пределу, получим $x_0 = -\int_{t_0}^{t_0+\vartheta} X(t_0,t)b(t)u(t,\tau_*)\,dt$. С другой стороны, $x_0 = -\int_{t_0}^{t_0+\vartheta} X(t_0,t)b(t)u(t,\tau_0)\,dt$ и поэтому (см. доказательство свойства 1) $\tau_* = \tau_0$. Следовательно, из сходимости $x_j \to x_0$ следует сходимость $f^{-1}(x_j) \to f^{-1}(x_0)$. Доказательство равенства (13) очевидно.

С в о й с т в о 3. *Пусть* $\vartheta \leqslant \sigma(t_0)$. *Для каждого* $k = 1, \ldots, n-1$ *и любой точки* $\tau = (\tau_{n-k}, \ldots, \tau_{n-1}) \in M^k(\vartheta)$ *векторы* $h(\tau_{n-k}) \doteq X(t_0, t_0 + \tau_{n-k})b(t_0 + \tau_{n-k}), \ldots, \; h(\tau_{n-1}) \doteq X(t_0, t_0 + \tau_{n-1})b(t_0 + \tau_{n-1})$ *линейно независимы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если найдутся числа $c_{n-k}, \ldots, c_{n-1}$, не равные нулю одновременно, такие, что $h(\tau_{n-k})c_{n-k} + \cdots + h(\tau_{n-1})c_{n-1} = 0$, то для всякого $\psi \in \mathbb{R}^n$ имеет место равенство

$$\xi(\tau_{n-k})c_{n-k} + \cdots + \xi(\tau_{n-1})c_{n-1} = 0, \tag{15}$$

где $\xi(\tau_i) = \psi X(t_0, t_0 + \tau_i)b(t_0 + \tau_i)$. Пусть $c_j \neq 0$. Найдётся такой вектор $\psi \neq 0$, что функция $\xi(t) = \psi X(t_0, t)b(t)$ имеет нули в точках $t_0 + \tau_i, \; i \neq j$ и $\xi(\tau_j) \neq 0$ (это следует из неосцилляции и цитированной теоремы Бернштейна). Поэтому из (15) следует, что $\xi(\tau_j)c_j = 0$. Свойство 3 доказано.

В силу свойств 1–3, для любого $\vartheta \leqslant \sigma(t_0)$ и каждого $k = 1, \ldots, n-1$, множество $N_+^k(t_0, \vartheta)$ является гладким (класса C^1) многообразием размерности k, вложенными в $\mathbb{R}^n$. В действительности оно принадлежит классу C^{r+1}. Докажем это. Из равенства $f(\tau + \delta\tau) = f(\tau) + df(\tau)\delta\tau + \mathrm{o}(|\delta\tau|)$, где $df(\tau) = (q_{n-k}(\tau), \ldots, q_{n-1}(\tau))$, $q_i(\tau) = \partial f(\tau)/\partial\tau_i = -2(-1)^{i-n+k}h(\tau_i)$, $i = n-k, \ldots, n-1$, следует, что оператор $df(\tau)$ действует из пространства $T_\tau M^k$ касательного к многообразию $M^k(\vartheta)$ в точке τ (и отождествляемого с $\mathbb{R}^k$) в пространство $T_x N^k$ касательное к $N_+^k(t_0, \vartheta)$ в точке $x = f(\tau)$ (моделью которого служит $\mathbb{R}^k$). Кроме того, $df(\tau)(T_\tau M^k) = T_x N^k$ и поэтому $df(\tau)$ — изоморфизм. С учетом условий на систему (1), легко проверить, что функция $\tau \to df(\tau)$ принадлежит классу C^r, следовательно, f — диффеоморфизм класса C^{r+1}, и поэтому $N_+^k(t_0, \vartheta)$ — многообразие класса C^{r+1}.

Т е о р е м а 3. *Пусть система* (1) *докритическая на* $\mathbb{R}$. *Тогда для каждого* $\vartheta \leqslant \sigma(t_0)$ *множество управляемости* $D_\vartheta(t_0)$ *является строго выпуклым телом в* $\mathbb{R}^n$ (*т. е.* $\operatorname{int} D_\vartheta(t_0) \neq \varnothing$ *и для любых* $x, x_0 \in \partial D_\vartheta(t_0)$ *и любого* $\lambda \in (0,1)$ *точка* $\lambda x + (1-\lambda)x_0 \in \operatorname{int} D_\vartheta(t_0)$). *Граница* $\partial D_\vartheta(t_0)$ *множества* $D_\vartheta(t_0)$ *есть объединение непересекающихся гладких* (*класса* C^{r+1}) *многообразий* $N_+^k(t_0, \vartheta)$ *и* $N_-^k(t_0, \vartheta)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, *и объединение* $\left(\bigcup\limits_{i=0}^{k-1} N_-^i(t_0, \vartheta)\right) \bigcup \left(\bigcup\limits_{i=0}^{k-1} N_+^i(t_0, \vartheta)\right)$ *является общим краем многообразий* $\operatorname{cl} N_+^k(t_0, \vartheta)$ *и* $\operatorname{cl} N_-^k(t_0, \vartheta)$. *Далее, всякой точке* $x \in N_+^k(t_0, \vartheta)$ *отвечает единственное управление, переводящее* $x(t_0) = x$ *в* $x(t_0 + \vartheta) = 0$, *причем* $u(t, x)$ *имеет ровно* k *переключений на интервале* $(t_0, t_0 + \vartheta)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Все утверждения теоремы, кроме утверждения о строгой выпуклости $D_\vartheta(t_0)$ уже доказаны. Доказательство строгой выпуклости следует из единственности управления $u(t, x_0)$, переводящего точку $x_0 = x(t_0) \in \partial D_\vartheta(t_0)$ в нуль за время ϑ. Действительно, если найдётся $\lambda \in (0,1)$ такое, что $x_\lambda = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_0 \in \partial D_\vartheta(t_0)$ для некоторых $x_0, x_1 \in \partial D_\vartheta(t_0)$, то $u_\lambda(t) = \lambda u(t, x_1) + (1-\lambda)u(t, x_0)$ — единственное управление, переводящее точку x_λ в нуль за время ϑ. Поэтому $|u_\lambda(t)| = 1$ для всех $t \in [t_0, \vartheta)$. Следовательно, либо $\lambda \notin (0,1)$, либо $u(t, x_0) = u(t, x_1)$ и тогда $x_0 = x_1$.

П р и м е р 2. На рис. 1 построено множество управляемости $D_\vartheta(t_0)$ системы $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = x_3$, $\dot{x}_3 = u$, $|u| \leqslant 1$, при $\vartheta = 3$, $t_0 = 0$. «Верхняя шапка», т. е. многообразие $N_+^2(0, 3)$, построена на рис. 2.

П р и м е р 3. На рис. 3 и 4 построены $D_\vartheta(t_0)$ и $N_+^2(t_0, \vartheta)$ для системы из примера 1 при $|u| \leqslant 1$, $t_0 = 0$, $\vartheta = 2\pi$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0.1\sin t$, $a_3 = 1 + 0.999\sin t$.

4. Структура расширенного множества управляемости. Введем обозначение $\tau_n = \vartheta$ и для каждого $k = 0, 1, \ldots, n$ и любого $t \in \mathbb{R}$ определим многообразия $\mathcal{M}^k(t)$, где $\mathcal{M}^0(t) \doteq \{0\}$, $\mathcal{M}^k(t) \doteq \{\tau = (\tau_{n-k+1}, \ldots, \tau_n) \colon \; 0 < \tau_{n-k+1} < \cdots < \tau_n < \sigma(t)\}$, $k = 1, \ldots, n$ и многообразия $\mathcal{M}^{1+k} = \mathbb{R} \times \mathcal{M}^k(t)$. Всякой точке $p = (t, \tau) \in \mathcal{M}^{1+k}$ поставим в соответствие точку $q = (t, x)$, где $x = 0$ при $k = 0$, а при $k \geqslant 1$

$$x = x(p) = -\sum_{i=n-k}^{n-1} (-1)^{i-n+k} \int\limits_{t+\tau_i}^{t+\tau_{i+1}} X(t,s)b(s)\,ds, \quad \tau_{n-k} = 0. \tag{16}$$

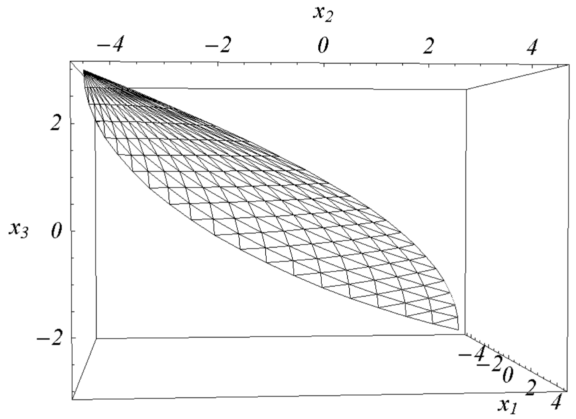

Рис. 1.

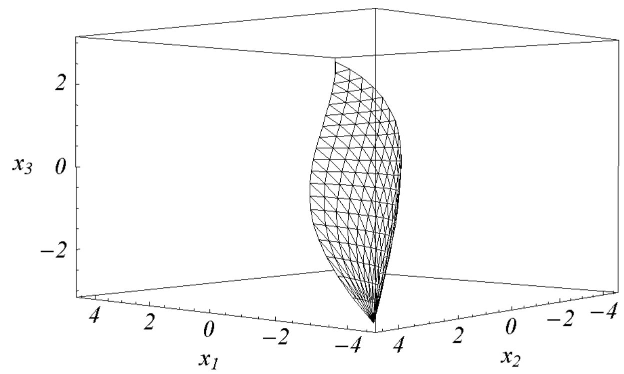

Рис. 2.

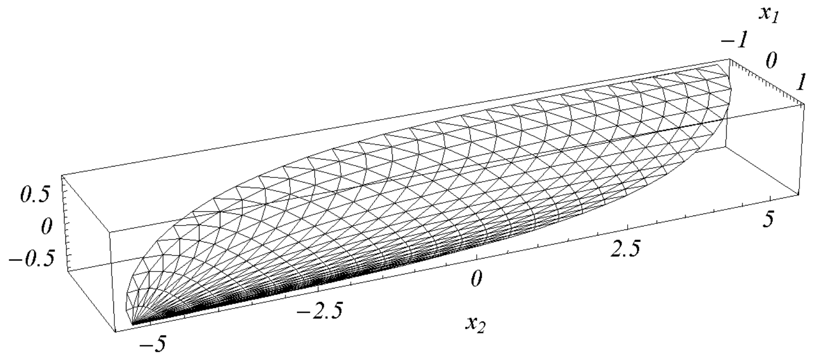

Рис. 3.

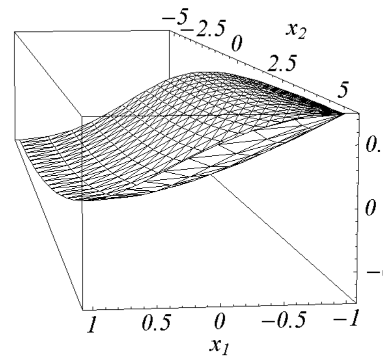

Рис. 4.

Таким образом, для каждого k задана функция $p \to F(p) = q$ с областью определения $\mathcal{M}^{1+k}$ и областью значений $\mathcal{N}_+^{1+k} \doteq F(\mathcal{M}^{1+k})$ (в дальнейшем нижний индекс у $\mathcal{N}_+^1$ опускаем). Так как $\mathcal{N}_+^{1+k} = \mathbb{R} \times \mathcal{N}_+^k(t)$, где $\mathcal{N}^0(t) = \{0\}$, а для $k \geqslant 1$ множество $\mathcal{N}_+^k(t)$ состоит из точек вида (16), то $\mathcal{N}_+^k(t) \subset D_{\sigma(t)}(t)$. Поэтому, в силу принципа максимума Понтрягина и условия $\tau_n < \sigma(t)$, каждой точке $q = (t, x) \in \mathcal{N}_+^{1+k}$ отвечает единственная точка $p = (t, \tau) \in \mathcal{M}^{1+k}$, задающая (при $k \geqslant 2$) моменты переключений управления, переводящего позицию (t, x) в позицию $(t + \tau_n, 0)$ и оптимального в смысле быстродействия (при $k = 0$ оптимальное управление $\equiv 0$, а при $k = 1$ не имеет переключений). Доказательство этого факта аналогично доказательству свойства 1. Следовательно, существует функция $F^{-1}\colon\ \mathcal{N}_+^{1+k} \to \mathcal{M}^{1+k}$ обратная к F. Проведя рассуждения, аналогичные доказательству свойства 2, легко убедиться, что функция $q \to F^{-1}(q)$ непрерывна на $\mathcal{N}_+^{1+k}$. Следовательно, F — гомеоморфизм многообразий $\mathcal{M}^{1+k}$ и $\mathcal{N}_+^{1+k}$.

Далее, для F имеет место равенство $F(p + \delta p) = F(p) + dF(p)\delta p + \mathrm{o}(|\delta p|)$, где $dF(p) = \operatorname{col}(1, 0, \ldots, 0)$ при $k = 0$, а для $k \geqslant 1$,

$$dF(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ w_{n-k}(p) & w_{n-k+1}(p) & \ldots & w_n(p) \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Здесь $w_{n-k}(p) = \frac{\partial x(p)}{\partial t} = A(t)x(p) + b(t) + w_{n-k+1}(p) + \cdots + w_n(p)$, $w_i(p) = \frac{\partial x(p)}{\partial \tau_i} = 2(-1)^{i-n+k} X(t, t+\tau_i) b(t + \tau_i)$, $i = n - k + 1, \ldots, n - 1$, $w_n(p) = \frac{\partial x(p)}{\partial \tau_n} = (-1)^k X(t, t + \tau_n) b(t, t + \tau_n)$.

Можно показать (как это сделано при доказательстве свойства 3), что при каждом фиксированном $p \in \mathcal{M}^{1+k}$ векторы $w_{n-k+1}(p), \ldots, w_n(p)$ линейно независимы, поэтому столбцы матрицы $dF(p)$ тоже линейно независимы. Следовательно $dF(p)$ — изоморфизм пространства $T_p\mathcal{M}^{1+k}$, касательного к многообразию $\mathcal{M}^{1+k}$ в точке p, в пространство $T_q\mathcal{N}_+^{1+k}$, касательное к многообразию $\mathcal{N}_+^{1+k}$ в точке $q = F(p)$. Кроме того, функция $p \to dF(p)$ принадлежит классу C^r и поэтому F — диффеоморфизм класса C^{r+1}. Следовательно, для каждого $k = 0, 1, \ldots, n$, многообразие $\mathcal{N}_+^{1+k}$ является гладким многообразием класса C^{r+1}.

Построенные многообразия $\mathcal{N}_+^{1+k}$ обладают тем свойством, что для точек $(t_0, x_0) \in \mathcal{N}_+^{1+k}$ оптимальное (в смысле быстродействия) управление $u_0(t)$ при $t \in [t_0, t_0 + \tau_{n-k+1}(t_0, x_0))$ равно $+1$. Аналогичным образом строятся многообразия $\mathcal{N}_-^{1+k}$, $k = 1, \ldots, n$ (в этом случае оптимальное управление начинается с -1).

З а м е ч а н и е 1. Непосредственно проверяется, что в силу (17), вектор скорости $v_+(q_0) \doteq \operatorname{col}(1, A(t_0)x_0 + b(t_0))$ движения $t \to q(t) = (t, x(t))$, ($x(t)$ — решение системы (1), проходящее через точку x_0 в момент времени t_0 под действием управления $u = +1$) находится в пространстве $T_{q_0}\mathcal{N}_+^{1+k}$, касательном к многообразию $\mathcal{N}_+^{1+k}$ в точке q_0. Далее, из приведенных построений следует, что многообразия $\mathcal{N}^1$, $\mathcal{N}_-^{1+k}$ и $\mathcal{N}_+^{1+k}$, $k = 1, \ldots, n$, рассматриваемые как многообразия вложенные в $\mathbb{R}^{1+n}$, не имеют общих точек, и многообразие $\mathcal{N}_+^k \bigcup \mathcal{N}_-^k$ является общим краем многообразий $\operatorname{cl} \mathcal{N}_+^{1+k}$ и $\operatorname{cl} \mathcal{N}_-^{1+k}$.

Т е о р е м а 4. *Пусть система* (1) *докритическая. Тогда расширенное множество управляемости* $\mathfrak{D} \doteq \mathbb{R} \times D_{\sigma(t)}(t)$ *представимо в виде* $\mathfrak{D} = \operatorname{cl}\left(\mathfrak{N}_+^{1+n} \bigcup \mathfrak{N}_-^{1+n}\right)$, *где* $\mathfrak{N}_+^{1+k} = \mathcal{N}_+^{1+k} \bigcup \mathcal{N}_-^k \bigcup \mathcal{N}_+^{k-1} \bigcup \cdots \bigcup \mathcal{N}^1$, $\mathfrak{N}_-^{1+k} = \mathcal{N}_-^{1+k} \bigcup \mathcal{N}_+^k \bigcup \mathcal{N}_-^{k-1} \bigcup \cdots \bigcup \mathcal{N}^1$, $k = 0, \ldots, n$. *Многообразия* $\mathfrak{N}_+^{1+k}$, $\mathfrak{N}_-^{1+k}$ *слабо инвариантны, и для каждого* $k = 0, \ldots, n$, *многообразие* $\mathfrak{N}_+^k \bigcup \mathfrak{N}_-^k$ *является общим краем многообразий* $\operatorname{cl} \mathfrak{N}_+^{1+k}$ *и* $\operatorname{cl} \mathfrak{N}_-^{1+k}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства слабой инвариантности многообразий $\mathfrak{N}_+^{1+k}$ достаточно заметить, что для любой точки $q_0 = (t_0, x_0) \in \mathcal{N}_+^{1+k}$ найдётся управление $u(t, q_0)$ (в качестве такого управления достаточно взять управление, оптимальное в смысле быстродействия) такое, что соответствующее ему решение системы (1) с начальным условием $x(t_0) = x_0$ будет проходить через многообразия $\mathcal{N}_-^k$, $\mathcal{N}_+^{k-1}, \ldots, \mathcal{N}^1$ (см. замечание 1). Аналогично доказывается слабая инвариантность многообразий $\mathfrak{N}_-^{1+k}$. Далее, выше было показано, что многообразие $\mathcal{N}_+^k \bigcup \mathcal{N}_-^k$ является общим краем многообразий $\operatorname{cl} \mathcal{N}_+^{1+k}$ и $\operatorname{cl} \mathcal{N}_-^{1+k}$, $k = 1, \ldots, n$; следовательно, для каждого $k = 0, \ldots, n$ многообразие $\mathfrak{N}_+^k \bigcup \mathfrak{N}_-^k$ является общим краем многообразий $\operatorname{cl} \mathfrak{N}_+^{1+k}$ и $\operatorname{cl} \mathfrak{N}_-^{1+k}$.

Докажем представимость $\mathfrak{D} = \operatorname{cl}\left(\mathfrak{N}_+^{1+n} \bigcup \mathfrak{N}_-^{1+n}\right)$. Пусть $q_0 \in \mathfrak{D}$. Тогда, в силу определения $\mathfrak{D}$, существует оптимальное в смысле быстродействия управление $u(t, q_0)$, приводящее движение $q(t, q_0) = (t, x(t, q_0))$ на многообразие $\mathcal{N}^1$ за время $\vartheta \leqslant \sigma(t_0)$, причем решение $x(t, q_0)$ системы (1) имеет не более $n - 1$ переключений. Следовательно, $q(t, q_0)$ принадлежит либо $\operatorname{cl} \mathfrak{N}_+^{1+n}$, либо $\operatorname{cl} \mathfrak{N}_-^{1+n}$, в зависимости от положения точки q_0, и мы имеем включение $\mathfrak{D} \subset \operatorname{cl}\left(\mathfrak{N}_+^{1+n} \bigcup \mathfrak{N}_-^{1+n}\right)$. Обратно, пусть $q_0 \in \operatorname{cl} \mathcal{N}_+^{1+n}$. Тогда существует оптимальное в смысле быстродействия управление $u(t, q_0)$, приводящее $q(t, q_0)$ на многообразие $\mathcal{N}^1$ за время $\vartheta \leqslant \sigma(t_0)$. Проведя то же рассуждение для $q_0 \in \operatorname{cl} \mathcal{N}_-^{1+n}$, получим включение $\operatorname{cl}\left(\mathfrak{N}_+^{1+n} \bigcup \mathfrak{N}_-^{1+n}\right) \subset \mathfrak{D}$, и, наконец, равенство $\mathfrak{D} = \operatorname{cl}\left(\mathfrak{N}_+^{1+n} \bigcup \mathfrak{N}_-^{1+n}\right)$. Теорема доказана.

Работа финансируется Российским фондом фундаментальных исследований (97-01-00413) и конкурсным центром Удмуртского госуниверситета (97-04).

Список литературы

1. *Тонков Е. Л.* // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9, № 12. С. 2180 — 2185.
2. *Тонков Е. Л.* // Успехи матем.наук. 1983, Т. 38, № 4. С. 131.
3. *Николаев С. Ф., Тонков Е. Л.* // Изв. Ин-та матем. и информ. 1997, № 2(8). С. 47 — 68.
4. *Лейхтвейс К.* Выпуклые множества. М., 1985.
5. *Палис Ж., ди Мелу В.* Геометрическая теория динамических систем. М., 1986.
6. *Родионова А. Г., Тонков Е. Л.* // Изв. ВУЗ-ов. Математика. 1993. № 5(372). С. 101 — 111.
7. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. М., 1974.
8. *Крейн М.Г., Нудельман А.А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М.,1973.
9. *Левин А. Ю.* // Успехи матем. наук. 1969. Т. 24, № 2(146). С. 43 — 96.
10. *Боднер В. А.* Теория автоматического управления полетом. М., 1964.

Институт математики и информатики
при Удмуртском государственном университете

Поступила в редакцию
10 декабря 1997 г.