Известия Института математики и информатики. Ижевск. 1998. № 1(12)

УДК 517.977

С.Ф. Николаев

ЧИСЛЕННАЯ ОЦЕНКА ИНТЕРВАЛА ДОКРИТИЧНОСТИ

В некоторых приложениях математической физики и теории оптимального управления используется понятие чебышевской системы совокупности скалярных функций, непрерывных и ограниченных на некотором интервале J. При этом возникает задача нахождения такого интервала максимальной длины (интервала докритичности), на котором данная система функций остается чебышевской. В этой статье построен численный алгоритм оценки длины интервала докритичности.

Совокупность непрерывных ограниченных функций

$$\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t) \tag{1}$$

называется *чебышевской системой* (Т-системой) на некотором интервале $[t_0, t_0 + \sigma)$, если всякая нетривиальная линейная комбинация этих функций имеет на $[t_0, t_0 + \sigma)$ не более $n - 1$ геометрически различных (т.е. без учета кратностей) нулей.

Основное свойство чебышевских систем известно под названием теоремы С.Н. Бернштейна [1, С.53]: *если совокупность* (1) *является T-системой на $[t_0, t_0+\sigma)$, то для любого набора точек $t_1, \ldots, t_{n-1}$ таких, что $t_0 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_0 + \sigma$, найдется линейная комбинация функций* (1)*, имеющая простые нули в точках t_i и не имеющая других нулей на $[t_0, t_0 + \sigma)$.*

Кроме того, совокупность (1) является T-системой на $[t_0, t_0+\sigma)$ в том и только в том случае, если для любого набора точек $t_1, \ldots, t_n$ таких, что $t_0 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t_0 + \sigma$, определитель $\det(\xi_i(t_j))_{i,j=1}^n$ отличен от нуля (см. [1, С.51]).

Обозначим через $\sigma(t_0)$ точную верхнюю грань таких $\sigma > 0$, что на полуинтервале $[t_0, t_0 + \sigma)$ совокупность функций (1) является чебышевской системой. Интервал $[t_0, t_0 + \sigma(t_0))$ будет называться *интервалом докритичности*. Простые примеры показывают, что функция $t \to \sigma(t)$ (принимающая неотрицательные конечные значения или $+\infty$) может быть разрывной. Кроме того, верна следующая лемма.

Л е м м а 1. *Если* t_0 *— точка разрыва функции* $\sigma(t)$, *то в этой точке выполнены неравенства*

$$\sigma(t_0 - 0) \leqslant \sigma(t_0) \quad \text{и} \quad \sigma(t_0) \leqslant \sigma(t_0 + 0).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем второе неравенство. Предположим обратное, т.е. $\sigma(t_0) > \sigma(t_0 + 0)$, и запишем это неравенство следующим образом: $\sigma(t_0) = \sigma(t_0 + 0) - \widehat{\sigma}$, где $\widehat{\sigma} > 0$ — величина предполагаемого «падения» функции $\sigma(t)$ при разрыве в точке t_0 (т.е. $\widehat{\sigma} = \lim\limits_{t \to t_0 + 0} (\sigma(t) - \sigma(t_0))$. В этом случае для некоторого $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \widehat{\sigma}$ существует нетривиальная линейная комбинация функций (1), имеющая n нулей на отрезке $[t_0 + \varepsilon, t_0 + \sigma(t_0) - \widehat{\sigma} + \varepsilon]$, что в свою очередь противоречит тому, что всякая нетривиальная линейная комбинация функций (1) имеет на $[t_0, t_0 + \sigma(t_0))$ не более $n - 1$ нулей, поскольку отрезок $[t_0 + \varepsilon, t_0 + \sigma(t_0) - \widehat{\sigma} - \varepsilon]$ целиком лежит внутри интервала $[t_0, t_0 + \sigma(t_0))$. Следовательно, $\widehat{\sigma} \leqslant 0$. Доказательство первого неравенства аналогично доказательству второго с той лишь разницей, что вместо предела справа нужно взять предел слева. Лемма доказана.

П р и м е р 1. На рис. 1 изображен график функции $t \to \sigma(t)$, полученный численно для системы функций $\xi_1(t) = 1$, $\xi_2(t) = \cos(t)$. Этот пример иллюстрирует тот случай, когда $\sigma(t_0 - 0) < \sigma(t_0)$, а именно: $\sigma(k\pi - 0) = 0$, $\sigma(k\pi) = \pi$ для любого целого k.

П р и м е р 2. На рис. 2 изображен график функции $t \to \sigma(t)$ для системы функций $\xi_1(t) = e^t - 1$, $\xi_2(t) = \sin(t^2)$. Этот пример иллюстрирует тот случай, когда $\sigma(t_0 - 0) = \sigma(t_0)$ в точке разрыва $t_0 = 0$.

Пусть для некоторой системы функций (1) и некоторого t_0 выполнено $\sigma(t_0) < \infty$. Не уменьшая общности, можно считать, что в каждой линейной комбинации

$$\xi(t) \doteq c_1\xi_1(t) + \dots + c_n\xi_n(t) \tag{2}$$

множители $\{c_1, \dots, c_n\}$ обладают тем свойством, что

$$|\operatorname{col}(c_1, \dots, c_n)| = 1,$$

поскольку нормирование вектора $c \doteq \operatorname{col}(c_1, \dots, c_n)$ не влияет на расположение нулей линейной комбинации (2). Таким образом, $c \in S^{n-1}$ и в силу компактности множества S^{n-1} и линейности $\xi(t)$ по c можно построить сходящуюся последовательность $\{c^i\}_{i=1}^{\infty}$ такую, что соответствующая ей последовательность линейных комбинаций (которая будет

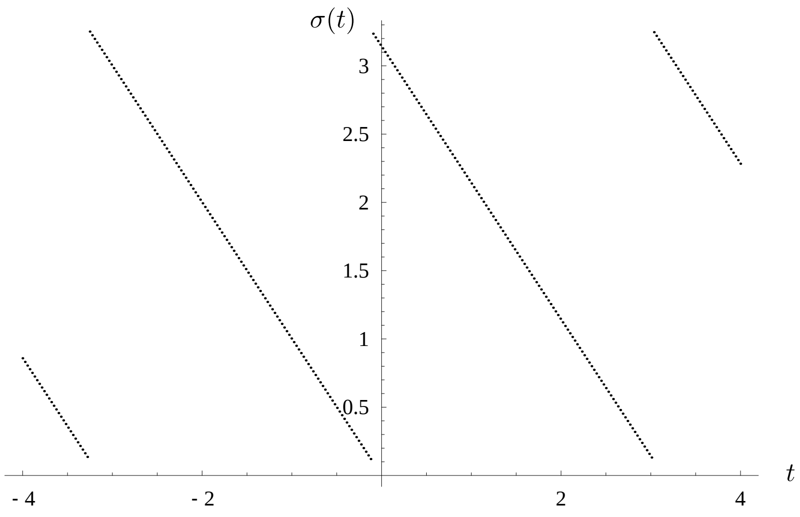

Рис. 1. $\xi_1(t) = 1,\ \xi_2(t) = \cos(t)$

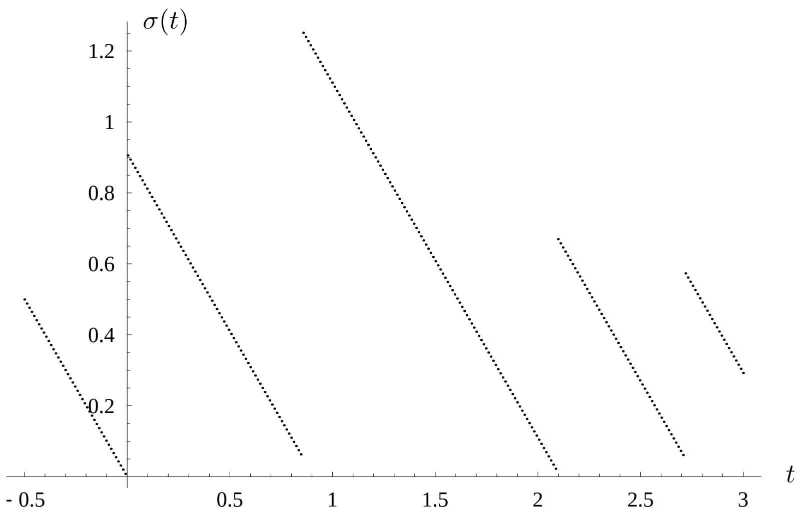

Рис. 2. $\xi_1(t) = e^t - 1,\ \xi_2(t) = \sin(t^2)$

обозначена как $\{\xi(t;c^i)\}_{i=1}^{\infty}$) обладает следующим свойством (здесь через $\phi_n(\xi(t))$ обозначен n-й нуль функции $\xi(t)$):

$$\lim_{i\to\infty}\phi_n(\xi(t;c^i)) = t_0 + \sigma(t_0).$$

Соответствующий предел $\widehat{\xi}(t) \doteq \lim\limits_{i\to\infty}\xi(t;c^i)$ будет называться *минимальной линейной комбинацией* функций (1).

Описываемый ниже вычислительный процесс представляет собой поиск минимальной линейной комбинации n непрерывных функций (1).

Строго говоря, поведение линейных комбинаций $\xi(t)$ функций (1) необходимо исследовать на полуоси $[t_0,+\infty)$, но это невозможно в силу ограниченности вычислительных ресурсов. Поэтому все исследования производятся на *испытательном отрезке* $[t_0, t_0+T]$, где T — некоторая наперед заданная константа, являющаяся параметром метода. Если ни одна линейная комбинация функций $\xi_1(t),\dots,\xi_n(t)$ (получаемая численно) не имеет n нулей на отрезке $[t_0, t_0+T]$, то полагается, что $\sigma(t_0) \geqslant T$.

1. Разобьем испытательный отрезок на $N-1$ частей, где N — еще один параметр метода. В результате этого разбиения будут получены точки $t_0, t_1, \dots, t_{N-1}$, где $t_{N-1} = t_0+T$. Все значения исследуемых функций $\xi_1(t),\dots,\xi_n(t)$ и их линейных комбинаций будут вычисляться в этих N точках.

Как было показано, все возможные линейные комбинации функций (1) могут быть нормированы таким образом, что $|\operatorname{col}(c_1,\dots,c_n)| = 1$, и наборы множителей $\{c_1,\dots,c_n\}$ достаточно выбирать таким образом, что $c \in S^{n-1}$ (здесь, как и ранее, $c = \operatorname{col}(c_1,\dots,c_n)$). Более того, вместо сферы S^{n-1} достаточно ограничиться её полусферой, которая будет обозначаться S^{n-1}_+, поскольку линейные комбинации, получаемые на второй полусфере S^{n-1}_-, будут отличаться лишь знаком.

2. Пусть $r_1,\dots,r_n$ произвольный нормированный базис в $\mathbb{R}^n$. Будем полагать

$$\begin{aligned}
s_2 &= r_1\sin\theta_1 + r_2\cos\theta_1\\
s_3 &= s_2\sin\theta_2 + r_3\cos\theta_2\\
&\dots\\
s_n &= s_{n-1}\sin\theta_{n-1} + r_n\cos\theta_{n-1}\\
c &= \frac{s_n}{|s_n|},
\end{aligned}$$

где $0 \leqslant \theta_i < \pi,\ i = 1,\ldots,n-1$. Углы $\theta_1,\ldots,\theta_{n-1}$ представляют собой координаты вектора c в сферической координатной системе, заданной на S_+^{n-1}. Ортогональность базиса $r_1,\ldots,r_n$ не требуется, поскольку (с точки зрения оптимальности алгоритма) проще нормировать вектор s_n. Введя еще один параметр метода M, разобьем отрезок $[0,\pi]$ на $M+1$ частей и будем производить вычисления $\xi(t)$ для каждого $\theta_i = \frac{2k_i\pi}{M+1},\ k_i = 0,\ldots,M-1,\ i = 1,\ldots,n-1$. Таким образом, на полусфере S_+^{n-1} задано M^{n-1} различных точек c, для каждой из которых необходимо вычислить линейную комбинацию $\xi(t) = c_1\xi_1(t)+\cdots+c_n\xi_n(t)$ в каждой из N точек отрезка $[t_0, t_0+T]$. Среди полученных функций $\xi(t)$ выберем ту, которая имеет ближайший n-й нуль на $[t_0, t_0+T]$, если таковой имеется (вектор c, соответствующий выбранной линейной комбинации будет обозначаться $\overline{c}$). В противном случае полагаем $\sigma(t_0) \geqslant T$ и заканчиваем процесс.

З а м е ч а н и е 1. На втором этапе необходимо произвести вычисление значений функций $\xi(t)$ в $N \cdot M^{n-1}$ точках. Разумеется, при больших n предлагаемый метод приведет к огромным вычислительным затратам и, вообще говоря, не может быть применим для «промышленного» использования (по крайней мере, при нынешнем уровне развития вычислительной техники). Но в исследовательских и демонстрационных целях этот метод дает приемлемые результаты. Например, автору удалось вычислить $\sigma(t_0)$ для системы пяти функций (1) за несколько часов (все вычисления, результаты которых приводятся в этой статье, произведены с использованием персонального компьютера, оснащенного процессором Pentium с тактовой частотой 133 MHz).

Прежде чем продолжить описание алгоритма, рассмотрим примеры того, какой вид имеют линейные комбинации $\xi(t)$, получаемые на втором этапе алгоритма.

П р и м е р 3. На рис. 3 построена минимальная линейная комбинация $\xi(t)$ функций $\xi_1(t) = 1,\ \xi_2(t) = t^2$, вычисленная при следующих параметрах алгоритма: $t_0 = -1,\ T = 1.3,\ N = 500,\ M = 1000$.

П р и м е р 4. На рис. 4 построена минимальная линейная комбинация $\xi(t)$ функций $\xi_1(t) = t,\ \xi_2(t) = \sin(t),\ \xi_3(t) = \cos(t)$ при $t_0 = -1,\ T = 1.8,\ N = 500,\ M = 1000$.

Эти простые примеры иллюстрируют одну важную особенность минимальных линейных комбинаций — возможны ситуации, когда корни минимальной линейной комбинации $\xi(t)$ (полученной численно) «близки» друг к другу, что в пределе приводит к появлению одного корня кратности выше чем единица. Оказывается (этот факт не фиксирует-

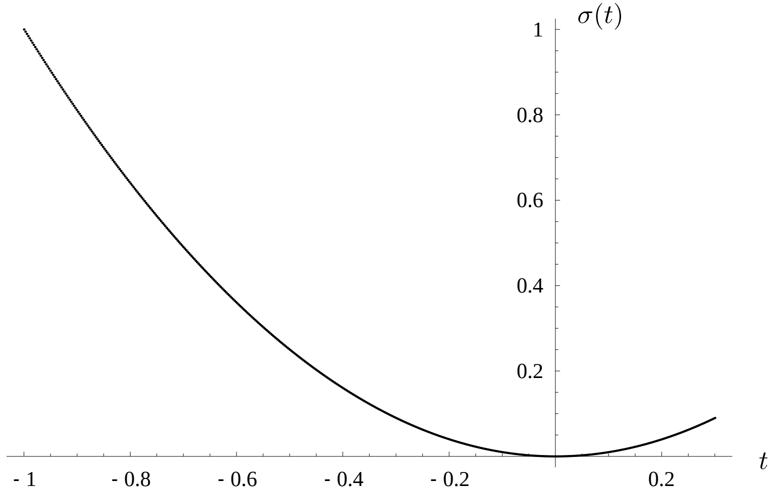

Рис. 3. $\xi_1(t) = 1,\ \xi_2(t) = t^2$

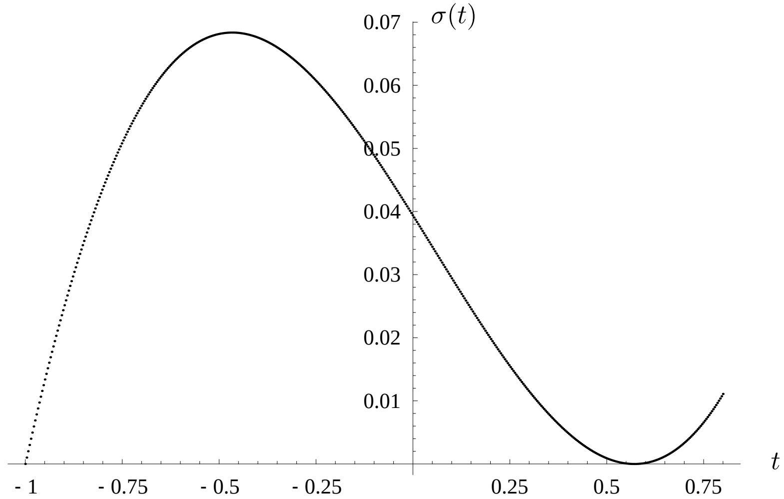

Рис. 4. $\xi_1(t) = t,\ \xi_2(t) = \sin(t),\ \xi_3(t) = \cos(t)$

ся в этой статье), что такая ситуация типична для тех случаев, когда функции $\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t)$ представляют собой решения обыкновенного дифференциального уравнения или квазидифференциального уравнения n-го порядка. Здесь же важно, что такие случаи возможны, и это существенно усложняет численную оценку функции $\sigma(t)$. В самом деле, как видно из этих рисунков, небольшое изменение множителей $\{c_1, \ldots, c_n\}$ (или, другими словами, небольшой сдвиг вектора c на полусфере S_+^{n-1}) приводит к сильному сдвигу n-го корня функции $\xi(t)$ и даже к исчезновению этого корня, что выглядит на рисунке как отрыв графика $\xi(t)$ от оси абсцисс. Для подавления этого эффекта служат следующие два этапа алгоритма.

3. Вектору $\overline{c}$, полученному на втором этапе алгоритма, соответствуют сферические координаты $\overline{\theta}_1, \ldots, \overline{\theta}_{n-1}$. Введем еще один параметр метода M_2 и повторим процедуру, описанную во втором этапе, но не на всей полусфере, а на том её участке, который ограничен квадратом (в сферических координатах)

$$\left[\overline{\theta}_1 - \frac{\pi}{M-1}, \overline{\theta}_1 + \frac{\pi}{M-1}\right] \times \cdots \times \left[\overline{\theta}_{n-1} - \frac{\pi}{M-1}, \overline{\theta}_{n-1} + \frac{\pi}{M-1}\right]$$

с заменой параметра M на M_2. Этот прием позволяет получить более близкую к минимальной линейную комбинацию $\xi(t)$ с такой точностью, как если бы вычисления на втором этапе производились со значением параметра M, равным $M \cdot M_2$. На самом же деле произведено $N \cdot (M^{n-1} + M_2^{n-1})$ вычислений значений функции $\xi(t)$.

4. Если после выполнения третьего этапа выяснено, что n-й и $(n-1)$-й нули функции $\xi(t)$ еще больше сблизились (по сравнению со вторым этапом) и расстояние между ними стало меньше, чем $\frac{2T}{N-1}$, то предполагается, что в пределе эти точки совпадут, образовав корень кратности выше чем единица. В этом случае в качестве результата работы алгоритма (т.е. точки $t_0 + \sigma(t_0)$) принимается среднее арифметическое значений n-го и $(n-1)$-го нулей функции $\xi(t)$, полученных на третьем этапе. В противном случае в качестве результата принимается значение n-го нуля функции $\xi(t)$.

Нетрудно видеть, что погрешность алгоритма в силу построения не превышает $1/N$ и может быть значительно уменьшена при помощи интерполяции функции $\xi(t)$ в окрестности своего n-го нуля.

Описанный выше алгоритм будет называться «медленным», поскольку он допускает усовершенствование для тех случаев, когда первый нуль минимальной линейной комбинации функций (1) находится в точке t_0. Такая ситуация имеет место при выполнении условий теоремы 2 работы [2] при $\xi_i(t) = \psi_i(t)b(t)$ (см. формулировку теоремы). Неформальный смысл этой теоремы состоит в том, что функции $\xi_i(t)$ оказываются решениями обыкновенного дифференциального или квазидифференциального уравнения n-го порядка. Введя обозначение $\xi_0 = (\xi_1(t_0), \ldots, \xi_n(t_0))$, выделим из сферы S^{n-1} те точки c', для которых $\xi_0 c' = 0$. Полученное множество будет являться сферой S^{n-2}. Выделим произвольным образом из этой сферы полусферу S_+^{n-2}. Заменив в описанном выше алгоритме полусферу S_+^{n-1} на только что построенную полусферу S_+^{n-2}, получим алгоритм, который будет называться «быстрым». В результате применения этого алгоритма получаются минимальные линейные комбинации, имеющие нуль в точке t_0.

Список литературы

1. Крейн М. Г., Нудельман А. А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М., 1973.

2. Николаев С.Ф., Тонков Е.Л. Дифференцируемость функции быстродействия и позиционное управление линейной нестационарной системой // Изв. Ин-та матем. и информ. 1996. № 2(8). С. 47–68.